Hans Siedler
Wolfgang Timischl

Ingenieur-Mathematik 4

Durchgerechnete Lösungen

E. DORNER

Inhalt

Erstellt von Hans Siedler und Wolfgang Timischl
3. Auflage, 2010

Anregungen zur Verbesserung erbeten an

wolfgang.timischl@schule.at oder gerald.kaiser@inode.at

1 Kegelschnitte

1.1 **a)** $x^2 + y^2 = 9$; $M(0/0)$; $r = 3$ **b)** $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$; $M(1/3)$; $r = 4$

c) $(x+2)^2 + y^2 = 4$; $M(-2/0)$; $r = 2$

d) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0$; $(x-2)^2 + y^2 = 4$; $M(2/0)$; $r = 2$

e) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$; $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 3$; $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$; $M(2/3)$; $r = 4$

f) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$; $x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 20$; $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$; $M(-2/1)$; $r = 5$

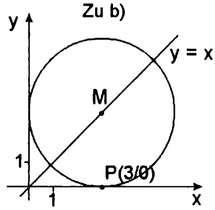
g) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$; $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 12$; $M(2/2)$; $r = \sqrt{12} \approx 3{,}464$

h) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 11$; $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 36$; $M(-3/4)$; $r = 6$

i) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$; $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 9$; $M(-2/-4)$; $r = 3$

1.2 **a)** $(x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2$; $(0-4)^2 + (0+1)^2 = r^2$; $r^2 = 17$;
$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 17$

b) Kreismittelpunkt auf der Geraden $y = x \Rightarrow y_M = x_M$; Kreis berührt die x-Achse im Punkt $P(3/0) \Rightarrow x_M = 3$, $r = 3$;
$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

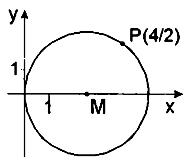


1.3 **a)** $P(0/0) \Rightarrow$ I: $(0 - x_M)^2 + (0 - y_M)^2 = r^2$
$Q(3/9) \Rightarrow$ II: $(3 - x_M)^2 + (9 - y_M)^2 = r^2$
$R(8/4) \Rightarrow$ $\underline{\text{III: } (8 - x_M)^2 + (4 - y_M)^2 = r^2}$
I: $x_M^2 + y_M^2 = r^2$
II: $x_M^2 + y_M^2 - 6 \cdot x_M - 18 \cdot y_N + 90 = r^2$
$\underline{\text{III: } x_M^2 + y_M^2 - 16 \cdot x_M - 8 \cdot y_N + 80 = r^2}$
I* = I – II: $6 \cdot x_M + 18 \cdot y_N = 90$
$\underline{\text{II* = I – III: } 16 \cdot x_M + 8 \cdot y_N = 80}$
I*: $x_M + 3 \cdot y_N = 15$
$\underline{\text{II*:} 2 \cdot x_M + \cdot y_N = 10}$
$\Rightarrow x_M = 3$; $y_M = 4$;
Einsetzen etwa in I $\Rightarrow 3^2 + 4^2 = r^2$; $r^2 = 25$;
$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

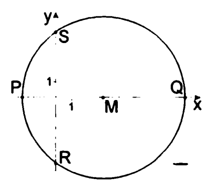
b) I: $(-1 - x_M)^2 + (8 - y_M)^2 = r^2$
II: $(0 - x_M)^2 + (7 - y_M)^2 = r^2$
$\underline{\text{III: } (6 - x_M)^2 + (15 - y_M)^2 = r^2}$
weiter wie a) $\Rightarrow$
$x_M = 3$; $y_M = 11$; $r^2 = 25$;
$(x-3)^2 + (y-11)^2 = 25$

c) I: $(3 - x_M)^2 + (4 - y_M)^2 = r^2$
II: $(8 - x_M)^2 + (-1 - y_M)^2 = r^2$
$\underline{\text{III: } (6 - x_M)^2 + (3 - y_M)^2 = r^2}$
weiter wie a) $\Rightarrow$
$x_M = 3$; $y_M = -1$; $r^2 = 25$;
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$

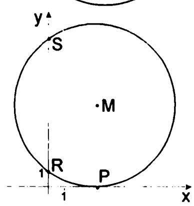
1.4 $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$
$y_M = 0$; $x_M = r$ und Kreis durch $P \Rightarrow (4 - r)^2 + 2^2 = r^2$
$16 - 8r + r^2 + 4 = r^2$; $8r = 20$; $r = 2{,}5$;
$(x - 2{,}5)^2 + y^2 = 2{,}5^2$



1.5 **a)** $(x-3)^2 + y^2 = 25$;
Schnitt mit der x-Achse: $y = 0$; $(x-3)^2 + 0^2 = 25 \Rightarrow x - 3 = \pm 5$;
$x_1 = -2$, $x_2 = 8$; Schnittpunkte: $P(-2/0)$, $Q(8/0)$;
Schnitt mit der y-Achse: $x = 0$; $(0-3)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 4$;
$y_1 = -4$, $y_2 = 4$; Schnittpunkte: $R(0/-4)$, $S(0/4)$



b) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$;
Schnitt mit der x-Achse: $y = 0$; $(x-3)^2 + (0-5)^2 = 25 \Rightarrow x - 3 = \pm 0$;
$x_1 = x_2 = 3$; Schnittpunkt als Berührpunkt: $P(3/0)$.
Schnitt mit der y-Achse: $x = 0$; $(0-3)^2 + (y-5)^2 = 25 \Rightarrow y - 5 = \pm 4$;
$y_1 = 1$, $y_2 = 9$; Schnittpunkte: $R(0/1)$, $S(0/9)$



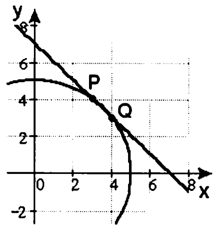
1.6 **a)** Schnitt des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ mit der Geraden $y = -x + 7$:

$x^2 + (-x + 7)^2 = 25$; $x^2 + x^2 - 14x + 49 = 25$; $2x^2 - 14x + 24 = 0$ oder

$x^2 - 7x + 12 = 0$; quadratische Gleichung:

$$x_{12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-48}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2};\ x_1 = 3;\ x_2 = 4;$$

$y_1 = -x_1 + 7 = 4$; $y_2 = -x_2 + 7 = 3$; Schnittpunkte: P(3/4); Q(4/3)

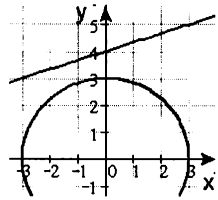


b) Schnitt $x^2 + y^2 = 9$ mit $y = \frac{x}{3} + 4$:

$$x^2 + \left(\frac{x}{3} + 4\right)^2 = 9;\ \text{quadratische Gleichung:}$$

$$10x^2 + 24x + 63 = 0;\quad x_{12} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 10 \cdot 63}}{2 \cdot 10} = \frac{-24 \pm \sqrt{-1944}}{2 \cdot 10}$$

da der Radikand (Zahl unter der Wurzel) negativ ist, gibt es keine reellen Lösungen, d.h. es gibt keinen Schnittpunkt

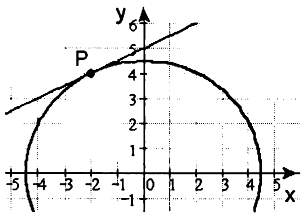


c) Schnitt $x^2 + y^2 = 20$ mit $y = \frac{x}{2} + 5$:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2} + 5\right)^2 = 20;\ \text{quadratische Gleichung:}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0;\ x_{12} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 4} = -2 \pm 0;\ x_1 = x_2 = -2;$$

$y_1 = y_2 = 4$; Gerade ist Tangente; Schnittpunkt P(-2/4) ist Berührpunkt

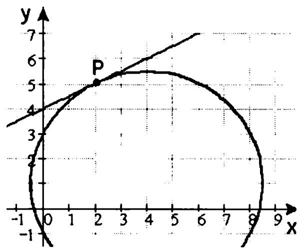


d) Schnitt $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 20$ mit $y = \frac{x}{2} + 4$:

$$(x - 4)^2 + \left(\frac{x}{2} + 4 - 1\right)^2 = 20;\ \text{quadratische Gleichung;}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_{12} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 4} = 2 \pm 0;\ x_1 = x_2 = 2;$$

$y_1 = y_2 = 5$; Gerade ist Tangente; Schnittpunkt P(2/5) ist Berührpunkt

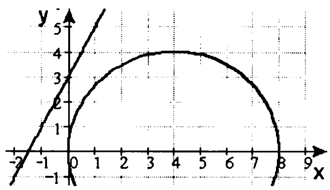


e) Schnitt $x^2 + y^2 - 8x = 0$ mit $y = 2x + 3$:

$$x^2 + (2x + 3)^2 - 8x = 0;\ \text{quadratische Gleichung:}$$

$$5x^2 + 4x + 9 = 0;\quad x_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5 \cdot 9}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm \sqrt{-164}}{10}$$

da der Radikand (Zahl unter der Wurzel) negativ ist, gibt es keine reellen Lösungen, d.h. es gibt keinen Schnittpunkt



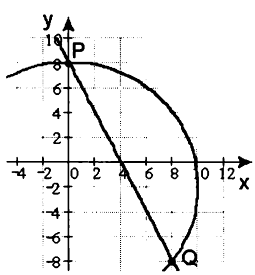
f) Schnitt $x^2 + y^2 + 4y = 96$ mit $y = -2x + 8$:

$x^2 + (-2x + 8)^2 + 4 \cdot (-2x + 8) = 96$; quadratische Gleichung:

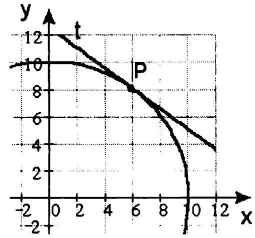
$x^2 - 8x = x \cdot (x - 8)$; Produkt – Null – Satz $\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 8$;

$y_1 = -2 \cdot x_1 + 8 = 8$; $y_2 = -2 \cdot x_2 + 8 = -8$;

Schnittpunkte: P(0/8), Q(8/-8)



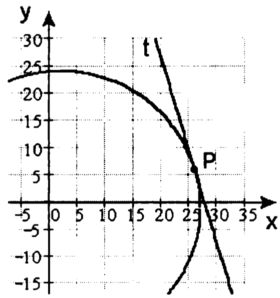
1.7 **a)** Kreispunkt P(6/8); die gesuchte Gerade (Tangente) t: $y = k \cdot x + d$ hat an der Stelle $x_0 = 6$ die Steigung des Kreises in P und verläuft durch P: Statt die beiden Funktionsgleichungen $y = \sqrt{100 - x^2}$ sowie $y = -\sqrt{100 - x^2}$ zu differenzieren, kann sofort implizit differenziert werden (siehe „Ingenieur-Mathematik 3", Seite 113):



$2x + 2y \cdot y' = 0$; daraus $y' = -\frac{x}{y}$; $k = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$; t: $y = -\frac{3}{4} \cdot x + d$;

t durch P: $8 = -\frac{3}{4} \cdot 6 + d \Rightarrow d = \frac{25}{2}$; Tangente t: $y = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{25}{2}$ oder $3x + 4y = 50$

b) Kreispunkt $P(x_0/6)$: $x_0^2 - 4x_0 + 36 + 2 \cdot 6 = 620$; quadratische Gleichung für x_0, wobei laut Angabe die positive Lösung gefragt ist: $x_0 = 26$; P(26/6).



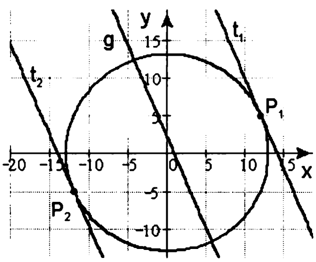
Implizite Ableitung: $2x - 4 + 2y \cdot y' + 2 \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y+1}$;

$k = \frac{2-26}{6+1} = -\frac{24}{7}$; Tangente t: $y = -\frac{24}{7} \cdot x + d$;

t durch P: $6 = -\frac{24}{7} \cdot 26 + d \Rightarrow d = \frac{666}{7}$;

t: $y = -\frac{24}{7} \cdot x + \frac{666}{7}$ oder $24x + 7y = 666$

1.8 **a)** Die beiden Tangenten t_1 und t_2 haben die Steigung k von g und verlaufen durch die Kreispunkte P_1 bzw. P_2, in denen sie den Kreis berühren; d.h. sie haben dort die Steigung k.



g: $y = -\frac{12}{5} \cdot x + 2$; $k = -\frac{12}{5}$.

Implizite Ableitung der Kreisgleichung: $2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow$ $y' = -\frac{x}{y}$. Für die Koordinaten x und y von P_1 bzw. P_2 gilt:

I: $-\frac{x}{y} = -\frac{12}{5}$ sowie II: $x^2 + y^2 = 169$;

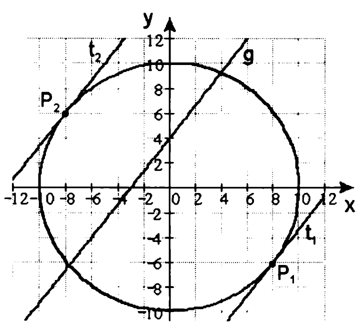
I $\Rightarrow 5x = 12y$ oder $y = \frac{5}{12} \cdot x$; Einsetzen in II: $x^2 + \frac{25x^2}{144} = 169 \Rightarrow x_{12} = \pm 12$.

$y_1 = \frac{5}{12} \cdot x_1 = 5$; $y_2 = \frac{5}{12} \cdot x_2 = -5$; $P_1(12/5)$; $P_2(-12/-5)$;

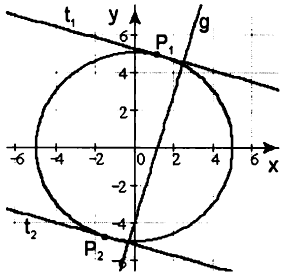
Tangente t_1: $y = -\frac{12}{5} \cdot x + d$; durch P_1: $5 = -\frac{12}{5} \cdot 12 + d \Rightarrow d = \frac{169}{5}$; t_1: $y = -\frac{12}{5} \cdot x + \frac{169}{5}$ oder $12x + 5y = 169$; Tangente t_2: $y = -\frac{12}{5} \cdot x + d$; durch P_2: $-5 = -\frac{12}{5} \cdot (-12) + d \Rightarrow d = -\frac{169}{5}$;

t_2: $y = -\frac{12}{5} \cdot x - \frac{169}{5}$ oder $12x + 5y = -169$

b) Wie a). Die Steigung 4/3 der Gerade ist die Steigung der Tangenten; $2y \cdot y' + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -x/y = 4/3$;
daraus $y = -3x/4$; einsetzen in $x^2 + y^2 = 100$ ergibt eine quadratische Gleichung für x mit den Lösungen $x_1 = 8$ und $x_2 = -8$ als x-Koordinaten der Berührpunkte P_1 und P_2.
Wegen $y = -3x/4$ folgt $y_1 = -6$ und $y_2 = 6$.
$P_1(8/-6)$ und $P_2(-8/6)$;
Tangenten: $4x - 3y = -50$; $4x - 3y = 50$



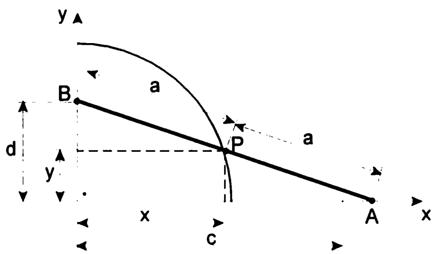
1.9 Die beiden Tangenten t_1 und t_2 verlaufen durch die Kreispunkte P_1 bzw. P_2, in denen sie den Kreis berühren.
k = 24/7 ist die Steigung der Geraden, Steigung der beiden Tangenten $k_t = -1/k = -7/24$. $2x + 2y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -x/y = -7/24$.
Für die Koordinaten x und y von P_1 bzw. P_2 gilt:
I: $-\frac{x}{y} = -\frac{7}{24}$ sowie II: $x^2 + y^2 = 169$; I $\Rightarrow y = \frac{24}{7}x$; in II einsetzen $\Rightarrow x_1 = 7/5$ und $x_2 = -7/5$. Aus I folgt weiters $y_1 = 24/5$ und $y_2 = -24/5$. $P_1\left(\frac{7}{5}/\frac{24}{5}\right)$ und $P_2\left(-\frac{7}{5}/-\frac{24}{5}\right)$.



Tangenten: t_1: $y = k_t\cdot x + d = -\frac{7}{24}\cdot x + d$; t_1 durch P_1: $\frac{24}{5} = -\frac{7}{24}\cdot\frac{7}{5} + d \Rightarrow d = \frac{125}{24}$;
t_1: $y = -\frac{7}{24}\cdot x + \frac{125}{24}$ oder $7x + 24y = 125$. Analog t_2: $= y = -\frac{7}{24}\cdot x - \frac{125}{24}$ oder $7x + 24y = -125$.

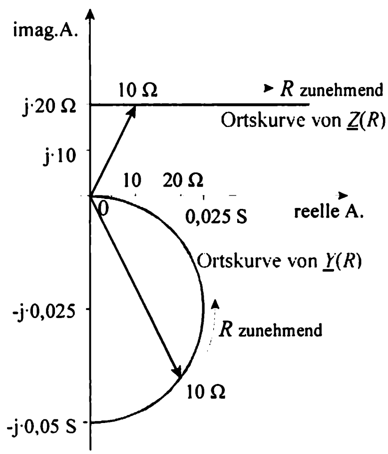
1.10 Pythagoras: $c^2 + d^2 = (2a)^2 = 4a^2$
$x = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2x$; $y = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2y$;
einsetzen: $(2x)^2 + (2y)^2 = 4a^2$ oder $x^2 + y^2 = a^2$.
P bewegt sich auf einer Kreislinie mit dem Radius a.

Anmerkung: Liegt P nicht in der Mitte des Stabes, so beschreibt P eine Ellipse (Ellipsenzirkel).



1.11 $\underline{Z}(R) = R + j\cdot\omega L$; die Ortskurve für $\underline{Z}(R)$ ist eine zur reellen Achse parallele (Halb-)Gerade, Parameter R:
$\underline{Z}(R) = R + j\cdot 20\Omega,\ R \ge 0$.
$\underline{Y}(R) = \frac{1}{R + j\cdot\omega L} = \frac{R - j\cdot\omega L}{(R + j\cdot\omega L)\cdot(R - j\cdot\omega L)} = \frac{R - j\cdot\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$ mit dem Realteil $x = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$ und dem Imaginärteil
$y = -\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$. Vom Parameter R freimachen:
$\frac{y}{x} = -\frac{\omega L}{R} \Rightarrow R = -\omega L\cdot\frac{x}{y}$. Einsetzen in $x = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}$
ergibt $x^2 + y^2 + \frac{1}{\omega L}y = 0$. Quadratische Ergänzung:

$$x^2 + y^2 + 2\cdot\frac{1}{2\omega L}y + \left(\frac{1}{2\omega L}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\omega L}\right)^2 = 0$$



und damit $x^2 + \left(y + \frac{1}{2\omega L}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\omega L}\right)^2$. Dies ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(0/-\frac{1}{2\omega L}\right) = M(0/-0{,}025)$, Werte in Siemens. Da $x \ge 0$, ist die Ortskurve von $\underline{Y}(R)$ ein Halbkreis.

1.12 $\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R} + j \cdot \omega C$; die Ortskurve für $\underline{Y}(\omega)$ ist eine zur imaginären Achse parallele (Halb-)Gerade:

$\underline{Y}(\omega) = 0{,}01 + j \cdot \omega \cdot 10^{-5}$ (in Siemens), $\omega \geq 0$.

$\underline{Z}(\omega) = \frac{1}{1/R + j\omega C} = \frac{R}{1 + j \cdot R\omega C} = \frac{R \cdot (1 - j \cdot R\omega C)}{1 + R^2\omega^2C^2}$ mit

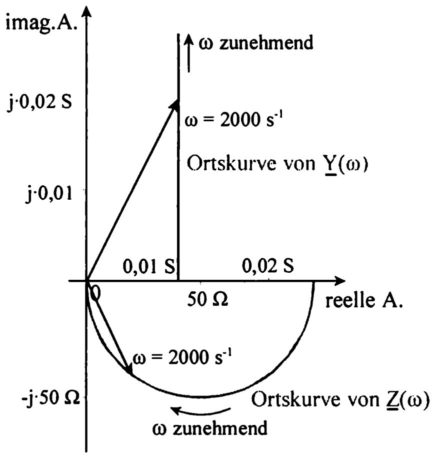
dem Realteil $x = \frac{R}{1+R^2\omega^2C^2}$ und dem Imaginärteil

$y = -\frac{R^2\omega C}{1+R^2\omega^2C^2}$. $\frac{y}{x} = -R\omega C \Rightarrow \omega = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{y}{x}$.

Einsetzen in $x = \frac{R}{1+R^2\omega^2C^2}$ ergibt $x^2 + y^2 - R \cdot x = 0$.

Quadratische Ergänzung: $x^2 + y^2 - R \cdot x =$

$x^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot x + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = 0$ und damit



$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$. Dies ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(\frac{R}{2}/0\right) = M(50/0)$, Werte in Ω.

Da $y \leq 0$, ist die Ortskurve von $\underline{Z}(\omega)$ ein Halbkreis.

1.13 **a)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ **b)** $b^2 = a^2 - e^2 = 27$; $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

c) $a^2 = b^2 + e^2 = 25$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **d)** $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

e) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ **f)** $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

1.14 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$: Ellipse mit den Halbachsen a = 4 und b = 3; die um +90°gedrehte Ellipse hat die Halbachsen a = 3 und b = 4. Somit: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

1.15 **a)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; M(0/0), a = 4, b = 3, e = $\sqrt{7}$, $F_1(-2{,}65/0)$, $F_2(2{,}65/0)$

b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$; M(0/0), a = 10, b = 5, e = $5\sqrt{3}$, $F_1(-8{,}66/0)$, $F_2(8{,}66/0)$

c) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$; M(0/0), $a = \sqrt{2}$, b = 1, e = 1, $F_1(-1/0)$, $F_2(1/0)$

d) $\frac{x^2}{1/2} + \frac{y^2}{1/8} = 1$; M(0/0), $a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 0{,}707$; $b = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{2} = 0{,}354$; $e = \sqrt{\frac{3}{8}} = 0{,}612$, $F_1(-0{,}612/0)$, $F_2(0{,}612/0)$

e) $x^2 - 2 \cdot 4x + 16 - 16 + 3y^2 + 4 = 0$; $(x-4)^2 + 3y^2 = 12$; $\frac{(x-4)^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$;

M(4/0), $a = 2\sqrt{3}$, b = 2, $e = 2\sqrt{2}$, $F_1(1{,}17/0)$, $F_2(6{,}83/0)$

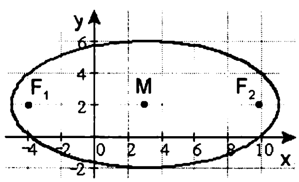
f) $x^2 - 6x + 4 \cdot (y^2 - 4y) = 39$;

$x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 4 \cdot (y^2 - 2 \cdot 2y + 4 - 4) = 39$;

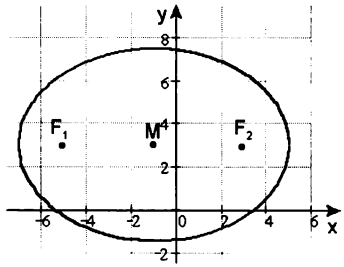
$(x-3)^2 - 9 + 4 \cdot (y-2)^2 - 16 = 39$; $(x-3)^2 + 4 \cdot (y-2)^2 = 64$;

$\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$; M(3/2), a = 8, b = 4, $e = 4\sqrt{3} = 6{,}93$,

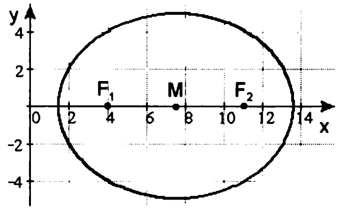
$F_1(-3{,}93/2)$, $F_2(9{,}93/2)$



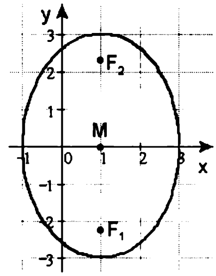
1.15 **g)** $5(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 6y) = 94;$
$5(x^2 + 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 2{\cdot}3y + 9 - 9) = 94;$
$5{\cdot}(x+1)^2 - 5 + 9{\cdot}(y-3)^2 - 81 = 94;$
$5{\cdot}(x+1)^2 + 9{\cdot}(y-3)^2 = 180;$
$\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{20} = 1$; M(-1/3), $a = 6$; $b = 2\sqrt{5}$;
$e = 4$; $F_1(-5/3)$, $F_2(3/3)$



h) $2{\cdot}(x^2 - 15x) + 3y^2 + 39 = 0;$
$2{\cdot}(x^2 - 2{\cdot}7{,}5x + 56{,}25 - 56{,}25) + 3y^2 + 39 = 0;$
$2{\cdot}(x - 7{,}5)^2 - 112{,}5 + 3y^2 + 39 = 0;$
$2{\cdot}(x - 7{,}5)^2 + 3y^2 = 73{,}5;\quad \frac{(x-7{,}5)^2}{36{,}75} + \frac{y^2}{24{,}5} = 1;$
M(7,5/0); $a = 6{,}06$; $b = 4{,}95$; $e = 3{,}5$; $F_1(4/0)$; $F_2(11/0)$



i) $9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4y^2 = 27;$
$9(x^2 - 1)^2 - 9 + 4y^2 = 27;\ 9(x-1)^2 + 4y^2 = 36;$
$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; M(1/0), große Halbachse: 3 (parallel zur y-Achse liegend), kleine Halbachse: 2 (auf x-Achse liegend), $e = \sqrt{5}$,
$F_1(1/-2{,}24)$, $F_2(1/\ 2{,}24)$

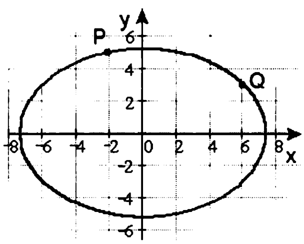


1.16 **a)** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\quad P \Rightarrow \text{I: } \frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{5^2}{b^2} = 1;\quad Q \Rightarrow \text{II: } \frac{6^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1;$

Substitution: $u = \frac{1}{a^2}$; $v = \frac{1}{b^2}$;

I*: $4u + 25v = 1$; II*: $36u + 9v = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{54}$; $v = \frac{1}{27}$;

damit $a^2 = 54$, $b^2 = 27$; $\frac{x^2}{54} + \frac{y^2}{27} = 1$ oder $x^2 + 2y^2 = 54$



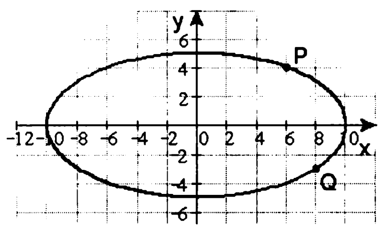
b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

$P \Rightarrow \text{I: } \frac{6^2}{a^2} + \frac{4^2}{b^2} = 1;\quad Q \Rightarrow \text{II: } \frac{8^2}{a^2} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1;$

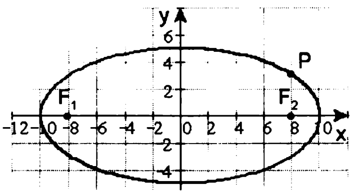
Substitution: $u = \frac{1}{a^2}$; $v = \frac{1}{b^2}$;

I*: $36u + 16v = 1$; II*: $64u + 9v = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{100}$; $v = \frac{1}{25}$;

damit $a^2 = 100$, $b^2 = 25$; $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ oder $x^2 + 4y^2 = 100$



1.17 Die Ellipse hat den Mittelpunkt M(0/0): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

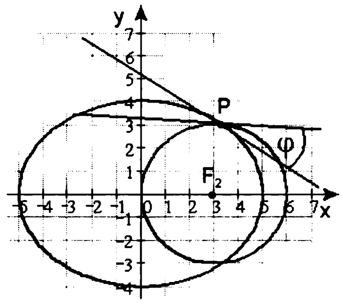


I: $\frac{8^2}{a^2}+\frac{3{,}6^2}{b^2}=1$; II: $a^2-b^2=8^2$; II $\Rightarrow a^2=b^2+64$; in I

einsetzen $\Rightarrow \frac{64}{b^2+64}+\frac{12{,}96}{b^2}=1$; $b^4-12{,}96\cdot b^2+829{,}44=0$;

Substitution: $u=b^2$; $u^2-12{,}96\cdot u+829{,}44=0 \Rightarrow u_1=36$; ($u_2=-23{,}04$ nicht möglich als Quadrat von b); $b^2=36$; $a^2=b^2+64=100$; $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ oder $36x^2+100y^2=3600$

1.18 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; $a^2=25$; $b^2=16$; $e=\sqrt{25-16}=3$; $F_2(3/0)$;

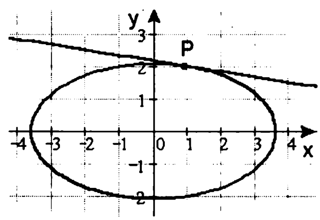


Kreisradius r = 3; Kreis: $(x-3)^2+y^2=9$;
Schnitt: I: $16x^2+25y^2=400$; II: $(x-3)^2+y^2=9$;
II $\Rightarrow y^2=9-(x-3)^2$; in I einsetzen:
$16x^2+25\cdot[9-(x-3)^2]=400$; $9x^2-150x+400=0 \Rightarrow$
Schnittstelle: $x_1=\frac{10}{3}=3{,}33$ ($x_2=\frac{40}{3}=13{,}33$ nicht sinnvoll);
$y^2=9-(x_1-3)^2 \Rightarrow y_{12}=\pm 2{,}89$; Schnittpunkt im ersten Quadranten: P(3/2,89).
Ellipsen- und Kreisgleichung implizit differenzieren:

$16\cdot 2x+25\cdot 2y\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{16x}{25y}=-\frac{16\cdot 3{,}33}{25\cdot 2{,}89}=-0{,}7155$;

$2\cdot(x-3)+2y\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x-3}{y}=-\frac{3{,}33-3}{2{,}89}=-0{,}1118$; Steigung der Ellipsentangente bzw. der Kreistangente im oberen Schnittpunkt P: $k_1=-0{,}715=\tan\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1=-35{,}6°$,
$k_2=-0{,}1118=\tan\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=-6{,}4°$. Schnittwinkel $\varphi=|\alpha_1-\alpha_2|=29{,}2°$

1.19 **a)** $x^2+3y^2=13 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}\cdot(13-x^2)}$; $y_0=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot(13-1^2)}=2$;

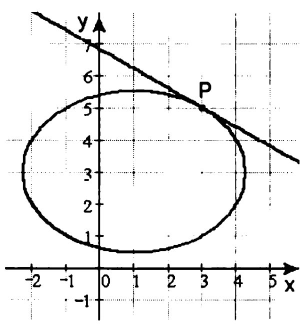


P(1/2); $2x+6y\cdot y'=0 \Rightarrow y'(1)=-\frac{2\cdot 1}{6\cdot 2}=-\frac{1}{6}=k$;

Tangente: $y=k\cdot x+d=-\frac{1}{6}\cdot x+d$; $2=-\frac{1}{6}\cdot 1+d \Rightarrow$

$d=\frac{13}{6}$; $y=-\frac{1}{6}\cdot x+\frac{13}{6}$ oder $x+6y=13$

b) $3\cdot(x^2-2x+1-1)+5\cdot(y^2-2\cdot 3y+9-9)+16=0$;
$3\cdot(x-1)^2-3+5\cdot(y-3)^2-45+16=0$;



$3\cdot(x-1)^2+5\cdot(y-3)^2=32$; $y=3\pm\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\left[32-3\cdot(x-1)^2\right]}$;

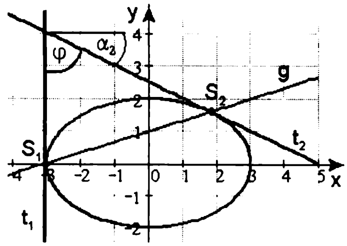
$y=3\pm\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\left[32-3\cdot(3-1)^2\right]}=5$; P(3/5);

$3\cdot 2x-6+5\cdot 2y\cdot y'-30y'=0 \Rightarrow y'(3)=\frac{3-3\cdot 3}{5\cdot 5-15}=-\frac{3}{5}=k$;

Tangente: $y=k\cdot x+d=-\frac{3}{5}\cdot x+d$; $5=-\frac{3}{5}\cdot 3+d \Rightarrow$

$d=\frac{34}{5}$; $y=-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{34}{5}$ oder $3x+5y=34$

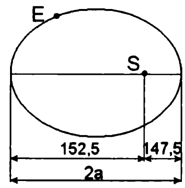
1.20 **a)** I: $3y - x = 3$; II: $4x^2 + 9y^2 = 36$;
$I \Rightarrow x = 3y - 3$; in II einsetzen: $4\cdot(3y-3)^2 + 9y^2 = 36$;
$5y^2 - 8y = 0$; $y\cdot(5y-8) = 0 \Rightarrow y_1 = 0$; $y_2 = \frac{8}{5}$;
$x_1 = 3y_1 - 3 = -3$; $x_2 = 3y_2 - 3 = \frac{9}{5}$;
Schnittpunkte: $S_1(-3/0)$; $S_2(9/5\ /\ 8/5)$;
$4\cdot 2x + 92y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{4x}{9y}$;



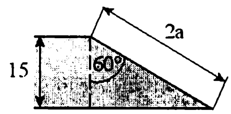
Steigung der ersten Tangente t_1: $k_1 = \infty$; t_1: $x = -3$;
Steigung der zweiten Tangente t_2: $k_2 = -\frac{4\cdot 9/5}{9\cdot 8/5} = -\frac{1}{2}$; t_2: $y = -\frac{1}{2}\cdot x + d$; $\frac{8}{5} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{5} + d \Rightarrow$
$d = \frac{5}{2}$; t_2: $y = -\frac{1}{2}\cdot x + \frac{5}{2}$ oder $x + 2y = 5$

b) Steigungswinkel von t_1: $\alpha_1 = -90°$; Steigungswinkel α_2 von t_2: $\tan\alpha_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = -26{,}6°$;
Winkel zwischen den beiden Tangenten: $\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2| = 63{,}4°$

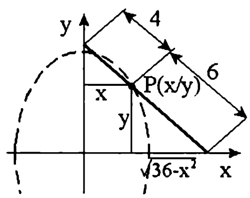
1.21 $a = \frac{147{,}5+152{,}5}{2} = 150$; $e = a - 147{,}5 = 2{,}5$; $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 149{,}98$.
Länge der großen Halbachse: a = 150 Mio km.



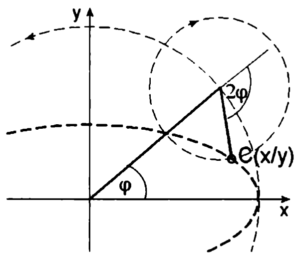
1.22 $2a\cdot\cos 60° = 15 \Rightarrow a = 15$ cm; $b = d/2 = 7{,}5$ cm.
Die beiden Halbachsenlängen betragen 15 cm und 7,5 cm.



1.23 Ähnliche Dreiecke (oder 2. Strahlensatz): $4 : 6 = x : \sqrt{36 - y^2}$;
$4\cdot\sqrt{36-y^2} = 6x$; $16\cdot(36 - y^2) = 36x^2$; $16\cdot 36 = 16y^2 + 36x^2$;
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$. Die Bahnkurve ist ein Viertelbogen einer Ellipse mit den Halbachsen a = 4 und b = 6.



1.24 $x = \overline{AD} + \overline{BE} = 5\cdot\cos\varphi + 2\cdot\cos\varphi = 7\cdot\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x}{7}$;
$y = \overline{DB} - \overline{CE} = 5\cdot\sin\varphi - 2\cdot\sin\varphi = 3\cdot\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{y}{3}$;
$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$.
C beschreibt eine Ellipse mit den Halbachsen a = 7 m und b = 3 m.



1.25 $\sin\alpha = \frac{\overline{SP}}{a} = \frac{x}{a}$; $\cos\alpha = \frac{\overline{RT}}{b} = \frac{y}{b}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; Ellipse mit den Halbachsen a und b

1.26 $2a = 15{,}8$; $a = 7{,}9$; $2e = 14{,}6$; $e = 7{,}3$; $b^2 = a^2 - e^2 \approx 9{,}1$; $\frac{x^2}{62{,}4} + \frac{y^2}{9{,}1} = 1$

1.27 a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $a^2 + b^2 = e^2 \Rightarrow b^2 = 100 - 64 = 36$; $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

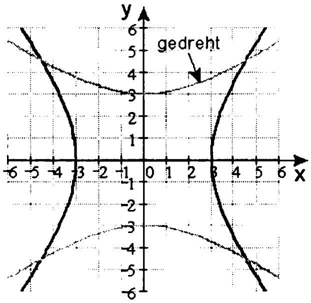
c) $a^2 + b^2 = e^2 \Rightarrow a^2 = 169 - 25 = 144$; $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

1.28 $16x^2 - 9y^2 = 144$; $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $a = 3$, $b = 4$.

Bei der gedrehten Hyperbel ist $a = 4$ und $b = 3$; also gilt nach Anmerkung im Lehrbuch Seite 16 für die gedrehte Hyperbel:

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ oder $16y^2 - 9x^2 = 144$.

Kontrolle: Man kann einen Punkt P auf der ursprünglichen Hyberbel wählen. Dreht man nun die Hyperbel und den Punkt P und 90°, so muss der so gebildete Punkt wieder auf der Hyberbel liegen. Z.B.: P(4/3.5277) geht bei Drehung um 90° über in Q(-3,5277/4), wie leicht überlegt werden kann. Q erfüllt die Gleichung $16y^2 - 9x^2 = 144$.



1.29 Aus der Angabe folgt, dass $2e = 10$ und $2a = 9-1 = 8$ (Hyperbeleigenschaft) ist.

$e = 5$; $a = 4$; $\sqrt{a^2 + b^2} = e \Rightarrow b = 3$; $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

1.30 a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; $a = 4$; $b = 3$; $e = 5$; $F_1(-5/0)$, $F_2(5/0)$; Asymptoten: $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x = \pm\frac{3}{4}\cdot x$;

$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = 73{,}7°$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$; $a = 2$; $b = 2$; $e = \sqrt{8} \approx 2{,}83$; $F_1(-2{,}83/0)$, $F_2(2{,}83/0)$;

Asymptoten: $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x = \pm x$; $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow \varphi = 90°$

1.30 c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$; $a = 4$; $b = 2$; $e = \sqrt{20} \approx 4{,}47$; $F_1(-4{,}47/0)$, $F_2(4{,}47/0)$;

Asymptoten: $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x = \pm\frac{1}{2}x$; $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 53{,}1°$

d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$; $a = 4$; $b = \sqrt{20}$; $e = \sqrt{a^2 + b^2} = 6$; $F_1(-6/0)$; $F_2(6/0)$;‘

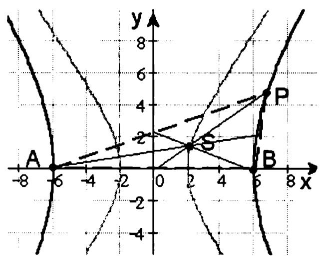
Asymptoten: $y = \pm\frac{b}{a}\cdot x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$; $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \varphi = 96{,}4°$

1.31 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$; $a = 6$; A(-6/0), B(6/0); P(x/y); Schwerpunkt $S(x_S/y_S)$;

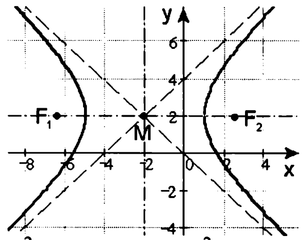
$x_S = \frac{1}{3}\cdot(-6 + 6 + x)$; $y_S = \frac{1}{3}\cdot(0 + 0 + y)$; daraus $x = 3\cdot x_S$ und

$y = 3\cdot y_S$; einsetzen in $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1$ ergibt $\frac{(3x_S)^2}{36} - \frac{(3y_S)^2}{81} = 1$

oder $\frac{x_S^2}{4} - \frac{y_S^2}{9} = 1$, d.h. der Schwerpunkt durchläuft eine Hyperbel mit $a = 2$ und $b = 3$.



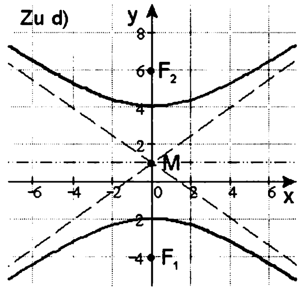
1.32 **a)** $x^2 + 2{\cdot}2x + 4 - 4 - (y^2 - 2{\cdot}2y + 4 - 4) = 9;$
$(x + 2)^2 - 4 - (y - 2)^2 + 4 = 9; (x + 2)^2 - (y - 2)^2 = 9;$
$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1;$ M(-2/2); $a = b = 3;$
$e = \sqrt{18} = 3\cdot\sqrt{2} \approx 4{,}24;$ $F_1(-6{,}24/2)$; $F_2(2{,}24/2)$



b) $16{\cdot}(x^2 + 2{\cdot}3x + 9 - 9) - 9{\cdot}(y^2 - 2y + 1 - 1) = 9;$ $16{\cdot}(x + 3)^2 - 144 - 9{\cdot}(y - 1)^2 + 9 = 9;$
$16{\cdot}(x + 3)^2 - 9{\cdot}(y - 1)^2 = 144;$ $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1;$ M(-3/1); $a = 3$; $b = 4$; $e = 5$; $F_1(-8/1)$; $F_2(2/1)$

c) $16{\cdot}x^2 - 9{\cdot}(y^2 + 2y + 1 - 1) = 585;$ $16{\cdot}x^2 - 9{\cdot}(y + 1)^2 + 9 = 585;$
$16{\cdot}x^2 - 9{\cdot}(y + 1)^2 = 576;$ $\frac{x^2}{36} - \frac{(y+1)^2}{64} = 1;$
M(0/-1); $a = 6$, $b = 8$, $e = 10$; $F_1(-10/-1)$; $F_2(10/-1)$

d) $16{\cdot}(y^2 - 2y + 1 - 1) - 9x^2 = 128;$
$16{\cdot}(y - 1)^2 - 16 - 9x^2 = 128;$ $16{\cdot}(y - 1)^2 - 9x^2 = 144;$
$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{9x^2}{16} = 1;$ um 90° gedrehte Hyperbel; M(0/1); $a = 4$,
$b = 3$, $e = 5$; $F_1(0/-4)$; $F_2(0/6)$



1.33 **a)** $x^2 + 2x + 1 - 1 - y^2 = 0;$ $(x + 1)^2 - y^2 = 1;$ $\frac{(x+1)^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1;$ Hyperbel mit M(-1/0), $a = b = 1$

b) $4x^2 - 8x + y^2 = 0;$ $4{\cdot}(x^2 - 2x + 1 - 1) + y^2 = 0;$ $4{\cdot}(x - 1)^2 + y^2 = 4;$ $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1;$
Ellipse mit M(1/0) sowie $a = 1$ und $b = 2$

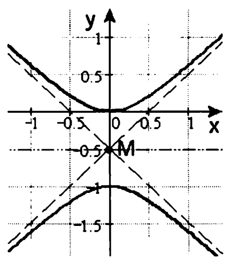
c) $x^2 - x + y^2 = 0;$ $x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 0;$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4};$
Kreis mit $M\left(\frac{1}{2}/0\right)$ und $r = \frac{1}{2}$

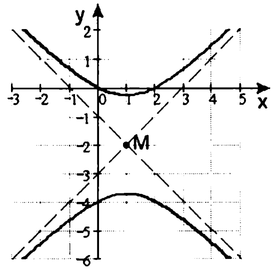
d) $x^2 + 2{\cdot}(y^2 - 4y) = 0;$ $x^2 + 2{\cdot}(y^2 - 2{\cdot}2y + 4 - 4) = 0;$ $x^2 + 2{\cdot}(y-2)^2 - 8 = 0;$
$x^2 + 2{\cdot}(y-2)^2 = 8;$ $\frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1;$ Ellipse mit M(0/2) sowie $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und $b = 2$

e) $x^2 - 4y^2 = 4;$ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1;$ Hyperbel mit M(0/0) sowie $a = 2$ und $b = 1$

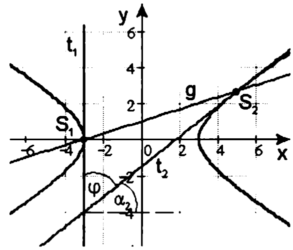
f) $4x = x^2 + y^2;$ $y^2 + x^2 - 4x = 0;$ $y^2 + (x^2 - 2{\cdot}2x + 4 - 4) = 0;$ $y^2 + (x - 2)^2 - 4 = 0;$
$(x - 2)^2 + y^2 = 4 = 0;$ Kreis mit M(2/0) und $r = 2$

g) $y = x^2 - y^2;$ $x^2 - y^2 - y = 0;$ $x^2 - (y^2 + y) = 0;$
$x^2 - \left(y^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0;$ $x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0;$
$x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4};$ $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{1}{4};$ $\frac{(y+1/2)^2}{1/4} - \frac{x^2}{1/4} = 1;$
um 90° gedrehte Hyperbel mit $M\left(0/-\frac{1}{2}\right)$ sowie $a = b = \frac{1}{2}$





1.33 h) $2x + 4y = x^2 - y^2$; $x^2 - 2x - y^2 - 4x = 0$; $x^2 - 2x - (y^2 + 4y) = 0$;
$x^2 - 2x + 1 - 1 - (y^2 + 2\cdot 2y + 4 - 4) = 0$;
$(x-1)^2 - 1 + (y + 2)^2 + 4 = 0$; $(x-1)^2 - (y + 2)^2 = -3$;
$(y + 2)^2 - (x-1)^2 = 3$; $\dfrac{(y+2)^2}{3} - \dfrac{(x-1)^2}{3} = 1$;
um 90° gedrehte Hyperbel mit $M(1/-2)$ sowie $a = b = \sqrt{3}$



1.34 a) I: $y = \dfrac{x}{3} + 1$; II: $4x^2 - 9y^2 = 36$; $4x^2 - 9\cdot\left(\dfrac{x}{3} + 1\right)^2 = 36$;

$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$; $x_2 = 5$; $y_1 = \dfrac{-3}{3} + 1 = 0$;

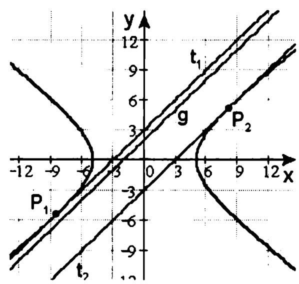
$y_2 = \dfrac{5}{3} + 1 = \dfrac{8}{3}$; Schnittpunkte: $S_1(-3/0)$; $S_2\left(5 / \dfrac{8}{3}\right)$;

$4\cdot 2x - 9\cdot 2y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{4x}{9y}$; Tangente t_1 durch S_1: $k = \infty$;

t_1: $x = -3$; Tangente t_2 durch S_2: $k = y' = \dfrac{4\cdot 5}{9\cdot 8/3} = \dfrac{5}{6}$; $y = \dfrac{5}{6}\cdot x + d$; $\dfrac{8}{3} = \dfrac{5}{6}\cdot 5 + d \Rightarrow d = -\dfrac{3}{2}$;

t_2 $y = \dfrac{5}{6}\cdot x - \dfrac{3}{2}$ oder $5x - 6y = 9$;

b) $\tan\alpha_2 = \dfrac{5}{6} \Rightarrow \alpha_2 = 39{,}8°$; Schnittwinkel φ zwischen t_1 und t_2: $90° - \alpha_2 = 50{,}2°$



1.35 a) Gesucht sind die Koordinaten x und y der Punkte P_1 und P_2 der Hyperbel mit der Steigung 1 (= Steigung von g: $y = x + 2$).
$16\cdot 2x - 25\cdot 2y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{16x}{25y} = 1$; $y = \dfrac{16x}{25}$ einsetzen in

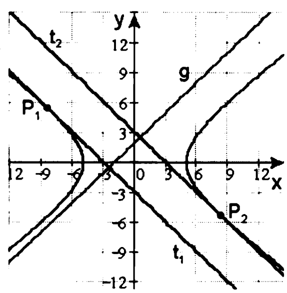
die Hyperbelgleichung: $16x^2 - 25\cdot\left(\dfrac{16x}{25}\right)^2 = 400 \Rightarrow$

$x_1 = -\dfrac{25}{3}$; $x_2 = \dfrac{25}{3}$; $y_1 = \dfrac{16x_1}{25} = -\dfrac{16}{3}$; $y_2 = \dfrac{16x_2}{25} = \dfrac{16}{3}$;

$P_1\left(-\dfrac{25}{3} / -\dfrac{16}{3}\right)$; $P_2\left(\dfrac{25}{3} / \dfrac{16}{3}\right)$;

Tangente t_1 durch P_1: $y = x + d$; $-\dfrac{16}{3} = -\dfrac{25}{3} + d \Rightarrow d = 3$; t_1: $y = x + 3$;

Tangente t_2 durch P_2: $y = x + d$; $\dfrac{16}{3} = \dfrac{25}{3} + d \Rightarrow d = -3$; t_2: $y = x - 3$



b) $16\cdot 2x - 25\cdot 2y\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{16x}{25y} = -1 \Rightarrow y = -\dfrac{16x}{25}$ einsetzen in

die Hyperbelgleichung: $16x^2 - 25\cdot\left(-\dfrac{16x}{25}\right)^2 = 400 \Rightarrow$

$x_1 = -\dfrac{25}{3}$; $x_2 = \dfrac{25}{3}$; $y_1 = -\dfrac{16x_1}{25} = \dfrac{16}{3}$; $y_2 = -\dfrac{16x_2}{25} = -\dfrac{16}{3}$;

$P_1\left(-\dfrac{25}{3} / \dfrac{16}{3}\right)$; $P_2\left(\dfrac{25}{3} / -\dfrac{16}{3}\right)$; Tangente t_1 durch P_1: $\dfrac{16}{3} = \dfrac{25}{3} + d \Rightarrow$

$\Rightarrow d = -3$; t_1: $y = -x - 3$; analog: Tangente t_2 durch P_2: $y = -x + d$; $d = 3$; t_2: $y = -x + 3$

1.36 Alle Längenmaße im Folgenden in km. Hyperbel mit a = 2: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

P(4/2): $\frac{4^2}{4} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$; $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$ oder $x^2 - 3y^2 = 4$

1.37 **a)** Die Menge aller Punkte mit einem Laufzeitunterschied 2a = 340·3 m bezüglich P und Q liegen auf einer Hyperbel, dessen Brennpunkte P und Q sind (Hyperbeleigenschaft!).

$b = \sqrt{2000^2 - a^2} = 1934$; Hyperbelgleichung: $\frac{x^2}{510^2} - \frac{y^2}{1934^2} = 1$

b) y = 1000 m; daraus x = 574 m (weil näher zu Q).

1.38 **a)** Parabel nach oben: $x^2 = 2p{\cdot}y$; $1^2 = 2p{\cdot}2 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$; $x^2 = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot y = \frac{1}{2}\cdot y$ oder $y = 2x^2$

b) Parabel nach rechts; $y^2 = 2p{\cdot}x$; $4 = 2p{\cdot}1 \Rightarrow p = 2$; $y^2 = 4x$

1.39 **a)** Parabel nach rechts: $y^2 = 2p\,x$; $\frac{p}{2} = 1$; $p = 2$; $y^2 = 4x$

b) Parabel nach oben: $x^2 = 2p{\cdot}y$; $\frac{p}{2} = 2$; $p = 4$; $x^2 = 8{\cdot}y$ oder $y = \frac{1}{8}\cdot x^2$

c) Parabel nach unten: $x^2 = -2p{\cdot}y$; $\frac{p}{2} = \frac{1}{4}$; $p = \frac{1}{2}$; $x^2 = -y$ oder $y = -x^2$

d) Parabel nach unten: $x^2 = -2p{\cdot}y$; $\frac{p}{2} = \frac{3}{2}$; $p = 3$; $x^2 = -6{\cdot}y$ oder $y = -\frac{1}{6}\cdot x^2$

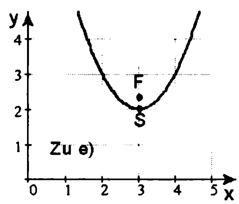
1.39 **e)** Parabel nach rechts: $(y - y_S)^2 = 2p\,(x - x_S)$; $\frac{p}{2} = 1$; $p = 2$; $(y - 1)^2 = 4\,(x + 1)$ oder $y^2 - 2y - 4x = 3$

f) P. nach oben: $(x - x_S)^2 = 2p{\cdot}(y - y_S)$; $\frac{p}{2} = 2$; $p = 4$; $(x - 1)^2 = 8{\cdot}(y - 1)$ oder $y = \frac{1}{8}\cdot(x^2 - 2x + 9)$

g) Parabel nach links: $(y - y_S)^2 = -2p{\cdot}(x - x_S)$; $\frac{p}{2} = 1$; $p = 2$; $y^2 = -4{\cdot}(x - 1)$ oder $y^2 + 4x - 4 = 0$

h) Parabel nach rechts: $(y - y_S)^2 = 2p\,(x - x_S)$; $\frac{p}{2} = 2$; $p = 4$; $y^2 = 8\,(x + 1)$ oder $y^2 - 8x - 8 = 0$

1.40 Form: Quadratischer Term = +2p· ... oder = - 2p· ... "



a) $x^2 = 2p{\cdot}y \Rightarrow p = \frac{1}{2}$; Parabel nach oben; S(0/0); $F\left(0/\frac{1}{4}\right)$

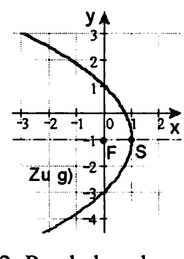
b) $y^2 = -\frac{4}{3}\cdot x = -2p\cdot x \Rightarrow p = \frac{2}{3}$; Parabel nach links; S(0/0); $F\left(-\frac{1}{3}/0\right)$

c) $x^2 = 6y = 2p{\cdot}y \Rightarrow p = 3$; Parabel nach oben; S(0/0); $F\left(0/\frac{3}{2}\right)$

d) $x^2 = -4y = -2p{\cdot}y \Rightarrow p = 2$; Parabel nach unten; S(0/0); $F(0/-1)$

e) $x^2 - 2{\cdot}3x + 9 - 9 + 11 = y$; $(x - 3)^2 = y - 2 = 2p{\cdot}(y - 2) \Rightarrow p = \frac{1}{2}$;

Parabel nach oben; S(3/2); F(3/2,25)

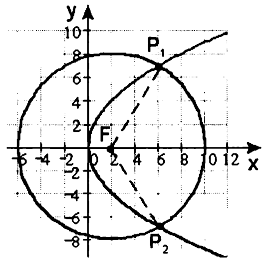


f) $3y^2 = 2x + 2$; $y^2 = \frac{2}{3}\cdot(x + 1) = 2p{\cdot}(x+1) \Rightarrow p = \frac{1}{3}$; Parabel nach rechts; S(-1/0); $F\left(-\frac{5}{6}/0\right)$

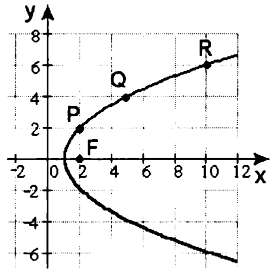
g) $y^2 + 2y + 1 - 1 = 3 - 4x$; $(y + 1)^2 = 4 - 4x = -4\,(x - 1) = -2p{\cdot}(x - 1) \Rightarrow p = 2$; Parabel nach links; S(1/-1); F(0/-1)

h) $5y^2 - 10y = 4x - 1$; $5{\cdot}(y^2 - 2y + 1 - 1) = 4x - 1$; $5{\cdot}(y - 1)^2 - 5 = 4x - 1$; $5{\cdot}(y - 1)^2 = 4x + 4$;

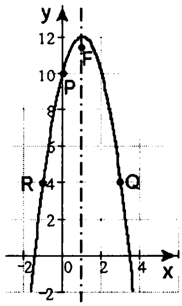
$(y - 1)^2 = \frac{4}{5}\cdot(x + 1) = 2p{\cdot}(x + 1) \Rightarrow p = \frac{2}{5}$; Parabel nach rechts; S(-1/1); $F(-0{,}8/0)$



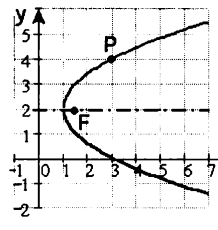
1.41 $y^2 = 8x = 2p \cdot x \Rightarrow p = 4$; Parabel mit S(0/0) nach rechts; F(2/0);
Die gesuchten Parabelpunkte P_1 und P_2 liegen auch auf einem Kreis mit M(2/0) und r = 8: $(x-2)^2 + y^2 = 64$;
I: $y^2 = 8x$; II: $(x-2)^2 + y^2 = 64$; einsetzen in II:
$(x-2)^2 + 8x = 64$; $x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$ ($x_2 = -10$ als Lösung nicht möglich).
$y_1 = \sqrt{8x_1} = 6{,}93$; $y_2 = -\sqrt{8x_1} = -6{,}93$; $P_1(6/6{,}93)$; $P_2(6/-6{,}03)$



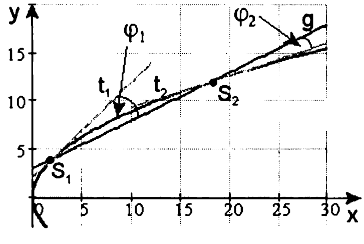
1.42 **a)** Die Parabel öffnet sich nach rechts, da die (Beträge der) y-Koordinaten der Punkte mit zunehmenden x-Koordinaten größer werden: $(y - y_S)^2 = 2p \cdot (x - x_S)$; es empfiehlt sich hier, diese Gleichung in der Form $x = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$ zu schreiben.
P(2/2) $\Rightarrow$ I: $2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$
Q(5/4) $\Rightarrow$ II: $5 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$
R(10/6) $\Rightarrow$ $\underline{\text{III: } 10 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c}$
$\Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 0, c = 1;\ x = \frac{1}{4} \cdot y^2 + 1;$
$4x = y^2 + 4$; $y^2 = 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow$ S(1/0); p = 2; F(2/0)



b) Die Parabelgleichung kann statt als Scheitelgleichung als Funktionsgleichung einer üblichen quadratischen Funktion geschrieben werden: $y = a \cdot x2 + b \cdot x + c$;
P(0/10) $\Rightarrow$ I: $10 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
Q(3/4) $\Rightarrow$ II: $4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$
R(-1/4) $\Rightarrow$ $\underline{\text{III: } 4 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c}$
$a = -2,\ b = 4,\ c = 10;\ y = -2x^2 + 4x + 10;\ 2x^2 - 4x - 10 = -y;$
$2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1) - 10 = -y;\ 2 \cdot (x-1)^2 - 2 - 10 = -y;\ 2 \cdot (x-1)^2 = -y + 12;$
$(x-1)^2 = -0{,}5 \cdot (y - 12)$; S(1/12); p = 0,25; F(1/11,875).



1.43 $y_S = 2$ (da y = 2 Parabelachse);
Parabel nach rechts geöffnet, weil der Parabelpunkt P eine x- Koordinate größer $x_S = 1$ besitzt:
$(y-2)^2 = 2p \cdot (x-1)$; P(3/4): $(4-2)^2 = 2p \cdot (3-1) \Rightarrow p = 1$;
$(y-2)^2 = 2 \cdot (x-1)$ oder $y^2 - 4y - 2x + 6 = 0$



1.44 I: $2y - x = 6$; II: $y^2 = 8x$; I $\Rightarrow x = 2y - 6$ in II einsetzen:
$y^2 = 8 \cdot (2y - 6)$; $y^2 - 16y + 48 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$; $y_2 = 12$;
$x_1 = 2y_1 - 6 = 2$;
$x_2 = 2y_2 - 6 = 18$; Schnittpunkte: $S_1(2/4)$; $S_2(18/12)$;
Die Schnittwinkel sind die Winkel zwischen der Geraden g und den Tangenten in S_1 und S_2.
Steigungswinkel der Geraden g: $2y - x = 6$: $y = 0{,}5 \cdot x + 3$;
$k = \tan\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 26{,}6°$.

$2y \cdot y' = 8 \Rightarrow y' = \frac{4}{y}$; Steigung der Tangente t_1 in S_1: $k_1 = \tan\alpha_1 = \frac{4}{y_1} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 45°$;

Steigung der Tangente t_2 in S_2: $k_2 = \tan\alpha_2 = \frac{4}{y_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha_2 = 18{,}4°$;

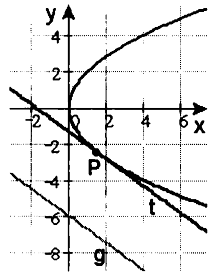
Schnittwinkel: $\varphi_1 = \alpha_1 - \alpha = 45° - 26{,}6° = 18{,}4°$; $\varphi_2 = \alpha - \alpha_2 = 26{,}6° - 18{,}4° = 8{,}1°$

1.45 **a)** Gerade g: $y = -\frac{3}{4}\cdot x - 6$; $k = -\frac{3}{4}$; Tangente t: $y = -\frac{3}{4}\cdot x + d$;

Berührpunkt P(x/y): $2y\cdot y' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y} = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{8}{3}$;

$x = \frac{y^2}{4} = \frac{(-8/3)^2}{4} = \frac{16}{9}$; $P\left(\frac{16}{9}/-\frac{8}{3}\right)$; t: $-\frac{8}{3} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{9} + d \Rightarrow$

$d = -\frac{4}{3}$; t: $y = -\frac{3}{4}\cdot x - \frac{4}{3}$ oder $9x + 12y + 16 = 0$

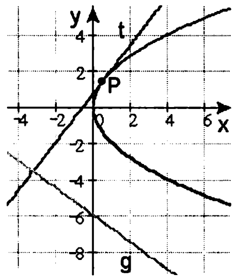


b) Steigung der zu g normalen Tangente: $k = -\frac{1}{-3/4} = \frac{4}{3}$;

Tangente t: $y = \frac{4}{3}\cdot x + d$; Berührpunkt P(x/y): $2y\cdot y' = 4 \Rightarrow$

$y' = \frac{2}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$; $x = \frac{y^2}{4} = \frac{(3/2)^2}{4} = \frac{9}{16}$; $P\left(\frac{9}{16}/\frac{3}{2}\right)$;

t: $\frac{3}{2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{16} + d \Rightarrow d = \frac{3}{4}$; t: $y = \frac{4}{3}\cdot x + \frac{3}{4}$ oder $16x - 12y + 9 = 0$



1.46 S(0/8); Parabel nach unten geöffnet: $x^2 = -2p\cdot(y-8)$; B(20/-2): $20^2 = -2p\cdot(-2-8) \Rightarrow p = 20$;

Parabelgleichung: $x^2 = -40\cdot(y-8)$ oder $y = -\frac{x^2}{40} + 8$. Nullstellen: $y = 0 \Rightarrow x^2 = 320$; $x_1 \approx 17{,}89$;

$x_2 \approx -17{,}89$; C(-17,89/0); D(17,89/0); Fahrbahnlänge $\overline{CD} \approx 35{,}8$ m.

$h_1 = h_4 = y(16) = -\frac{16^2}{40} + 8 = 1{,}6$ m; $h_2 = h_3 = y(8) = -\frac{8^2}{40} + 8 = 6{,}4$ m

Anmerkung: Die Parabelgleichung $y = -\frac{x^2}{40} + 8$ hätte man auch über den Ansatz $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ finden können.

1.47 S(0/3); Parabel nach oben geöffnet; $x^2 = 2p\cdot(y-3)$; P(18/12) ist Parabelpunkt:

$18^2 = 2p\cdot(12-3) \Rightarrow p = 18$; Parabelgleichung: $x^2 = 36\cdot(y-3)$ oder $y = \frac{x^2}{36} + 3$.

$h_1 = h_4 = y(12) = \frac{12^2}{36} + 3 = 7$ m; $h_2 = h_3 = y(6) = \frac{6^2}{36} + 3 = 4$ m.

Anmerkung: Die Parabelgleichung $y = \frac{x^2}{36} + 3$ hätte man auch über den Ansatz $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ finden können

1.48 L liegt im Brennpunkt der Parabel; S(0/0); Parabel nach rechts geöffnet: $y^2 = 2p\cdot x$; P(10/30) ist Parabelpunkt: $30^2 = 2p\cdot 10 \Rightarrow p = 45$; $\overline{SL} = \frac{p}{2} = 22{,}5$ m

1.49 $k = 10\% = \frac{1}{10}$; P(x/y) ist der gesuchte Punkt; $y = -\frac{x^2}{25}$, $y' = -\frac{2x}{25} = \frac{1}{10} \Rightarrow x = -5/4$.

$y = -\frac{(-5/4)^2}{25} = -\frac{1}{16}$; somit: $P\left(-\frac{5}{4}/-\frac{1}{16}\right)$. Gerade, auf der die Fahrbahn liegt: $y = \frac{x}{10} + d$;

$-\frac{1}{16} = \frac{-5/4}{10} + d \Rightarrow d = \frac{1}{16}$; $y = \frac{x}{10} + \frac{1}{16}$ oder $8x - 80y + 5 = 0$

1.50 a) I: $2x + y = 5$

<u>II: $-x^2 + 6x + y = 5$;</u>

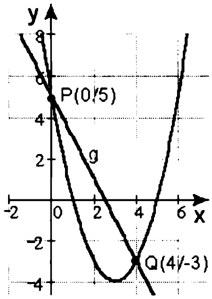
I $\Rightarrow y = 5 - 2x$, in II einsetzen: $-x^2 + 6x + 5 - 2x = 5$;

$4x - x^2 = 0$;

$x \cdot (4 - x) = 0$; Produkt – Null – Satz: $x_1 = 0$; $x_2 = 4$;

$y_1 = 5 - 2x_1 = 5$; $y_2 = 5 - 2x_2 = -3$.

Lösungspaare: (0, 5); (4, -3)



Graphische Lösung:
Gerade g: $y = -2x + 5$; Parabel $y = x^2 - 6x + 9$ oder $(x - 3)^2 = y + 4$; Schnittpunkte P(0/5) und Q(4/-3)

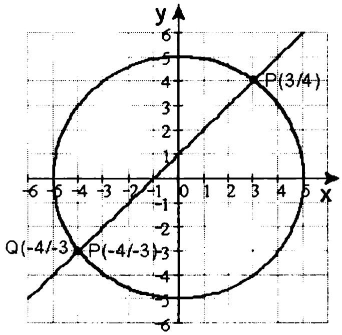
b) I: $-x + y = 1$

<u>II: $x^2 + y^2 = 25$;</u>

I $\Rightarrow y = 1 + x$, in II einsetzen: $x^2 + (1 + x)^2 = 25$; $x^2 + x - 12 = 0$;

$x_1 = 3$; $x_2 = -4$; $y_1 = 1 + x_1 = 4$; $y_2 = 1 + x_2 = -3$;

Lösungspaare: (3, 4), (-4, -3)



Graphische Lösung:
Gerade g: $y = x + 1$; Ursprungskreis $x^2 + y^2 = 25$ mit dem Radius $r = 5$; Schnittpunkte P(0/5) und Q(4/-3)

c) I: $2y - x = 8$

<u>II: $x^2 + y^2 - 8x - 2y = 3$;</u>

I $\Rightarrow x = 2y - 8$, in II einsetzen:

$(2y - 8)^2 + y^2 - 8 \cdot (2y - 8) - 2 \cdot y = 3$; $y^2 - 10y + 25 = 0 \Rightarrow$

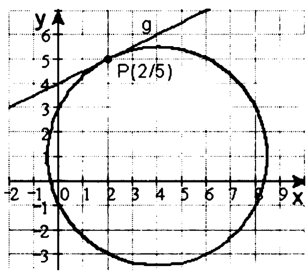
$y = 5$ (Doppellösung); $x = 2 \cdot 5 - 8 = 2$; Lösungspaar: (2, 5).

Graphische Lösung: Gerade g: $y = 0{,}5 \cdot x + 4$;

$x^2 + y^2 - 8x - 2y = 3$; $x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16 - 16 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 3$;

$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 20$; Kreis mit M(4/1) und $r = 2 \cdot \sqrt{5}$

Gerade berührt den Kreis in P(2/5).



d) I: $-x + 2y = 6$

<u>II: $x - y^2 + 4y = 3$;</u>

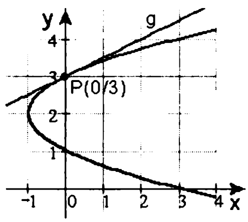
I $\Rightarrow x = 2y - 6$, in II einsetzen: $2y - 6 - y^2 + 4y = 3$;

$y^2 - 6y + 9 = (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow y = 3$ (Doppellösung);

$x = 2 \cdot 3 - 6 = 0$; Lösungspaar: (0, 3).

Graphische Lösung: Gerade g: $y = 0{,}5 \cdot x + 3$;

$x - y^2 + 4y = 3$; $y^2 - 2 \cdot 2y + 4 - 4 = x - 3$; $(y - 2)^2 = x + 1$: Parabel nach rechts geöffnet; S(-1/2); Gerade berührt die Parabel in P(0/3).



e) I: $2x - y = 5$

<u>II: $4x^2 + 9y^2 = 45$;</u>

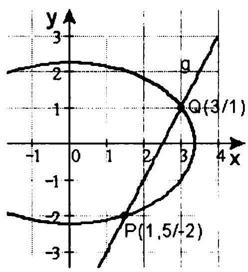
I $\Rightarrow y = 2x - 5$, in II einsetzen:

$4x^2 + 9 \cdot (2x - 5)^2 = 45$; $2x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 3$;

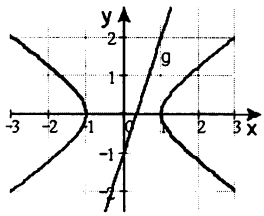
$y_1 = 2x_1 - 5 = -2$; $y_2 = 2x_2 - 5 = 1$; Lösungspaare: (1,5; -2); (3, 1).

Graphische Lösung: Gerade g: $y = 2x - 5$; Ellipse: $\frac{x^2}{45/4} + \frac{y^2}{5} = 1$;

M(0/0); $a \approx 3{,}35$; $b = 2{,}24$. Die Gerade schneidet die Ellipse in P(1,5/-2) und Q(3/1).

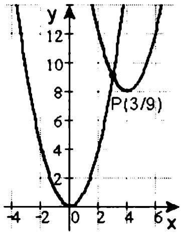


1.50 f) I: $3x - y = 1$
II: $x^2 - 2y^2 = 1$;
I $\Rightarrow y = 3x - 1$, in II einsetzen:
$x^2 - 2\cdot(3x-1)^2 = 1$; $17x^2 - 12x + 3 = 0 \Rightarrow$ keine Lösungen.
Graphische Lösung: Gerade g: $y = 3x - 1$; Hyperbel: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{0{,}5} = 1$;
M(0/0);a = 1; b = 0,71. Die Gerade schneidet die Hyperbel nicht!

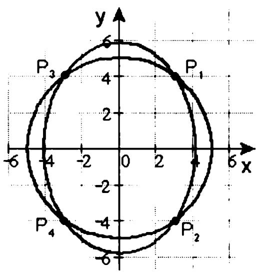


1.51 a) I: $y = x^2$
II: $y = x^2 - 8x + 24$;
$y = x^2$ in II einsetzen: $x^2 = x^2 - 8x + 24$; $8x = 24$; $x = 3$;
$y = 3^2 = 9$; Lösungspaar: (3, 9)

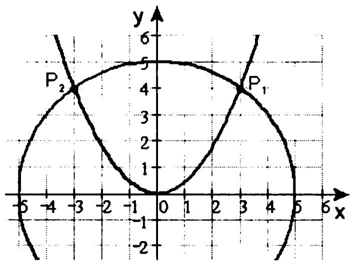
Graphische Lösung:
Schnitt zweier sich nach oben öffnender Parabel;
Schnittpunkt P(3/9)



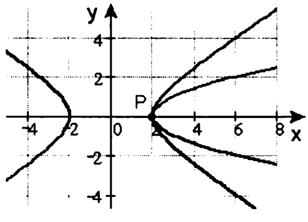
b) I: $x^2 + y^2 = 25$
II: $2x^2 + y^2 = 34$;
I $\Rightarrow y^2 = 25 - x^2$, in II einsetzen: $2x^2 + 25 - x^2 = 34$;
$x^2 = 9$; $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $y^2 = 25 - x_1^2 = 16$; $y_1 = 4$; $y_2 = -4$;
$y^2 = 25 - x_2^2 = 16$; $y_3 = 4$; $y_4 = -4$;
Lösungspaare: (3, 4); (3, -4); (-3, 4); (-3, -4).
Graphische Lösung:
Schnitt eines Kreises mit einer Ellipse; Schnittpunkte:
$P_1(3/4)$; $P_2(3/-4)$; $P_3(-3/4)$; $P_4(-3/-4)$;



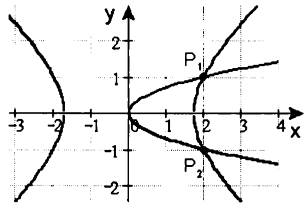
c) I: $-4x^2 + 9y = 0$
II: $x^2 + y^2 = 25$;
II $\Rightarrow x^2 = 25 - y^2$, in I einsetzen: $-4\cdot(25 - y^2) + 9y = 0$;
$4y^2 + 9y - 100 = 0 \Rightarrow y_1 = 4$; $y_2 = -\frac{25}{4}$; $x^2 = 25 - 4^2 = 9$;
$x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x^2 = 25 - \left(-\frac{25}{4}\right)^2 = -\frac{225}{16}$ (reell) nicht möglich; Lösungspaare: (3, 4); (-3, 4);
Graphische Lösung: Schnitt einer Parabel mit einem Kreis;
Schnittpunkte: $P_1(3/4)$; $P_2(-3/4)$



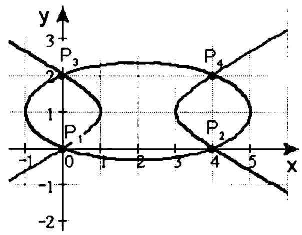
d) I: $x^2 - 2y^2 = 4$
II: $x = y^2 + 2$;
II $\Rightarrow y^2 = x - 2$, in I einsetzen: $x^2 - 2\cdot(x-2) = 4$;
$x^2 - 2x = x\cdot(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $y^2 = x_1 - 2$ (reell nicht möglich); $y^2 = x_2 - 2 = 0$; $y_1 = y_2 = 0$ (Doppellösung);
Lösungspaar: (2, 0);
Graphische Lösung: Schnitt der Hyperbel $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ mit der Parabel $y^2 = x - 2$; Schnittpunkt: P(2/0)



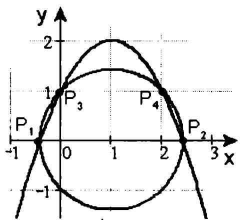
1.51 e) I: $x - 2y^2 = 0$
$\underline{\text{II: } x^2 - y^2 = 3;}$
II $\Rightarrow y^2 = x^2 - 3$, in I einsetzen: $x - 2\cdot(x^2 - 3) = 0$;
$2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -1{,}5; y^2 = x_1{}^2 - 3 = 1 \Rightarrow$
$x_1 = 1; x_2 = -1; y^2 = x_2 - 3 = -4{,}5$ (reell nicht möglich);
Lösungspaare: (2, 1); (2, -1)
Graphische Lösung: Schnitt der Parabel $y^2 = 0{,}5\cdot x$ mit der
Hyperbel $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$. Schnittpunkte: $P_1(2/1)$; $P_2(2/-1)$



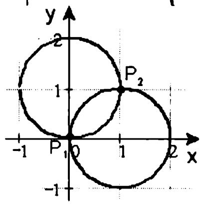
f) I: $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y = 0$
$\underline{\text{II: } x^2 - 3y^2 - 4x + 6y = 0;}$
Subtraktion I – II ergibt $8y^2 - 16y = 8\,.y\cdot(y - 2) \Rightarrow y_1 = 0$;
$y_2 = 2$; einsetzen (etwa) in I: $x^2 + 5\cdot0^2 - 4x - 10\cdot0 = 0$;
$x\cdot(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 4; x^2 + 5\cdot2^2 - 4x - 10\cdot2 = 0$;
$x^2 - 4x = x\cdot(x - 4) = 0 \Rightarrow x_3 = 0; x_4 = 0$;
Lösungspaare: (0, 0); (4, 0); (0, 2), (4, 2)
Graphische Lösung: $x^2 - 2\cdot2x + 4 - 4 + 5\cdot(y^2 - 2y + 1 - 1) = 0$;
$(x - 2)^2 - 4 + 5\cdot(y - 1)^2 - 5 = 0$; $(x - 2)^2 + 5\cdot(y - 1)^2 = 9$ ... eine Ellipse mit M(2/1);
$x^2 - 2\cdot2x + 4 - 4 - 3\cdot(y^2 - 2y + 1 - 1) = 0$; $(x - 2)^2 - 4 - 3\cdot(y - 1)^2 + 3 = 0$;
$(x - 2)^2 - 3\cdot(y - 1)^2 = 1$ ... eine Hyperbel ebenfalls mit M(2/1); Schnittpunkte: $P_1(0/0)$; $P_2(4/0)$;
$P_3(0/2)$; $P_4(4/2)$



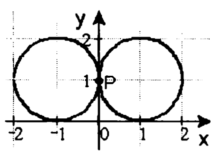
1.52 a) I: $x^2 - 2x + y - 1 = 0$
$\underline{\text{II: } x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0;}$
Subtraktion II – I ergibt $y^2 - y = y\cdot(y - 1) = 0 \Rightarrow y_1 = 0$;
$y_2 = 1$; $x^2 - 2x + y_1 - 1 = 0$; $x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -0{,}41$;
$x_2 = 2{,}41$; $x^2 - 2x + y_2 - 1 = 0$; $x^2 - 2x = x\cdot(x - 2) = 0$;
$x_3 = 0$; $x_4 = 2$;
Lösungspaare: (-0,41;0); (2,41; 0); (0; 1); (2; 1)



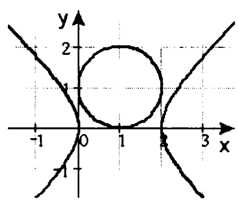
b) I: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
$\underline{\text{II: } x^2 + (y - 1)^2 = 1;}$
Subtraktion II – I ergibt $2\,x - 2y = 0$; daraus $y = x$; einsetzen
(etwa) in I ergibt $2x\cdot(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 1$;
$y_1 = x_1 = 0$; $y_2 = x_2 = 1$;
Lösungspaare: (0; 0); (1; 1)



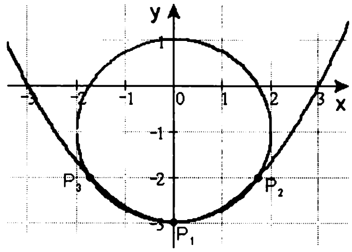
c) I: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
$\underline{\text{II: } (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1;}$
Subtraktion II – I ergibt $4x = 0$ oder $x = 0$; einsetzen (etwa)
in I ergibt $(-1)^2 + (y - 1)^2 = 1$; $(y - 1)^2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = 1$
(Doppellösung); Lösungspaar: (0; 1)



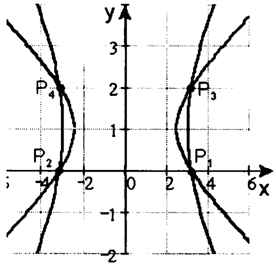
d) I: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$
$\underline{\text{II: } (x - 1)^2 - y^2 = 1;}$
Subtraktion II – I ergibt $2y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow$ keine (reelle)
Lösung



1.52 e) I: $3y = x^2 - 9$
$\underline{\text{II: } x^2 + y^2 + 2y = 3;}$
I $\Rightarrow x^2 = 3y + 9$; in II einsetzen: $3y + 9 + y^2 + 2y = 3$;
$y^2 + 5y + 6 = 0 \Rightarrow y_1 = -3$; $y_2 = -2$; $x^2 = 3y_1 + 9 = 0$;
$x_1 = x_2 = 0$ (Doppellösung);
$x^2 = 3y_2 + 9 = 3$; $x_3 = \sqrt{3}$; $x_4 = -\sqrt{3}$
Lösungspaare: (0; -3); ($\sqrt{3}$; -2); (-$\sqrt{3}$; -2)



f) I: $x^2 - y\cdot(y-2) = 10$
$\underline{\text{II: } x^2 - 4\cdot(y-1)^2 = 6;}$
Subtraktion II – I ergibt $-3y^2 + 6y - 4 = -4$; $y\cdot(y-2) = 0$
$\Rightarrow y_1 = 0$; $y_2 = 2$; einsetzen (etwa) in I ergibt
$x^2 - y_1\cdot(y_1 - 2) = 10$; $x^2 = 10$; $x_1 = \sqrt{10}$; $x_2 = -\sqrt{10}$;
$x^2 - y_2\cdot(y_2 - 2) = 10$; $x^2 = 0$; $x_3 = \sqrt{10}$; $x_4 = -\sqrt{10}$;
Lösungspaare:
($\sqrt{10}$; 0); ($-\sqrt{10}$; 0); ($\sqrt{10}$; 2); ($-\sqrt{10}$;2)



Diskrete Mathematik

2.1 $4\cdot8\cdot3 = 96$ Tage

2.2 **a)** $5! = 120$ Arten **b)** $3! = 6$ Arten

2.3 **a)** $9! = 362880$ ways **b)** $4!\cdot5! = 2880$ ways

2.4 $\binom{8}{2}2! = 8\cdot7 = 56$ Übersetzungen; soll für jedes Paar von Sprachen ein Dolmetscher zur Verfügung stehen (d.h. ein Dolmetsch übersetzt beispielsweise von Deutsch in Spanisch und *umgekehrt*, so sind $\binom{8}{2}$ Dolmetscher erforderlich.

2.5 $\binom{8}{2} = 28$ Spiele

2.6 $8\cdot\binom{4}{2} = 48$ Spiele in den 8 Vierergruppen; 16 Mannschaften steigen in das Achtelfinale auf: 8 Spiele mit 8 Siegern; 8 Mannschaften steigen in das Viertelfinale auf; 4 Spiele mit 4 Siegern; 4 Mannschaften steigen in das Halbfinale auf; 2 Spiele mit 2 Siegern; Finale und kleines Finale: je 1 Spiel. Summe: $48 + 8 + 4 + 2 + 2 = 64$ Spiele

2.7 Variationen mit Wiederholung: 0000000, 0000001, ... , 1111111; $2^7 = 128$ Zeichen

2.8 Variationen mit Wiederholung: AA, AB, ... , ZZ; $26^2 = 676$ Initialen.
1 17 676 Personen könnten theoretisch verschiedene Initialen haben, nicht jedoch 700 Personen. Dabei müssen gleiche Initialen vorkommen.

2.9 Variationen mit Wiederholung: Bezeichnet beispielsweise HH, dass beide Arme hochgestreckt sind, HL, dass der linke Arm hochgestreckt und der rechte Arm linksgestreckt sind usw., so gibt es folgende Variationen: HH, HT, HL, HR, TT, TH, TL, TR, ... insgesamt $2^4 = 16$ Zeichen

2.10 Beispiel für eine Beantwortung: 1b), 2c), 3a), 4d), 5a), 6c), 7d), 8a), 9b), 10b), kurz: bcadacdabb. An jeder der vier Stellen könnte a, b, c oder d stehen. Damit bilden die Beantwortungen Variationen mit Wiederholung. Anzahl: $4^{10} = 1\,048\,576$ mögliche Beantwortungen

2.11 Zeichen mit einem Element: •, – ; insgesamt $2^1 = 2$ Zeichen
Zeichen mit 2 Elementen: • •, • –, – •, – – ; insgesamt $2^2 = 4$ Zeichen
Zeichen mit 3 Elementen: • • •, • • –, • – •, • – –, – • •, – • –, – – •, – – – ;
insgesamt $2^3 = 8$ Zeichen
Zeichen mit 4 Elementen: $2^4 = 16$ Zeichen
Zeichen mit 5 Elementen: $2^5 = 32$ Zeichen.
Insgesamt: $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$ Zeichen

2.12 Würde man zwischen den beiden Buchstaben E im Wort KLEE unterscheiden, so wäre die Anzahl 4!. Da jedoch nicht unterschieden wird, ist diese Anzahl zu halbieren. Daher gibt es nur $4!/2 = 12$ Zeichenketten.

2.13 Bezeichnen a, b, c, d und e die 5 Bilder, so sind adc, dac oder cbd mögliche Reihenfolgen, wie drei der fünf Bilder an die Wand gehängt werden können. Es handelt sich um Variationen (ohne Wiederholung) von $k = 3$ Elementen aus $n = 5$ Elementen; ihre Anzahl: $5\cdot4\cdot3 = 60$ Möglichkeiten

2.14 **a)** Kombinationen von $k = 4$ Elementen aus $n = 10$ Elementen; Anzahl: $\binom{10}{4} = 210$ Arten

b) Variationen von $k = 4$ Elem. aus $n = 10$ Elementen; Anzahl: $\binom{10}{4}\cdot4! = 10\cdot9\cdot8\cdot7 = 5040$ Arten

2.15 **a)** $4! = 24$ Reihenfolgen **b)** $3! = 6$ Reihenfolgen
c) An erster Stelle 3 Möglichkeiten, die restlichen 3 Redner können beliebig angeordnet werden: $3\cdot3! = 18$ Reihenfolgen

2.16 **a)** $5! = 120$ Sitzanordnungen
b) Für den Fahrersitz kommen 3 Personen in Frage; die restlichen Plätze können von den 4 verbleibenden Personen beliebig besetzt werden; $3 \cdot 4! = 72$ Sitzanordnungen

2.17 **a)** Variationen von 4 Elementen aus 7 Elementen mit Wiederholung: $7^4 = 2401$ Wörter
b) Variationen von 4 Elementen aus 7 Elementen ohne Wiederholung: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ Wörter
c) Nach dem Buchstaben b Variationen von 3 Elementen aus 7 Elementen: $7^3 = 343$ Wörter
d) Wiederholungen sind nicht erlaubt; der letzte Buchstabe sei etwa der Vokal a. Dann kommen als die ersten drei Buchstaben alle Buchstaben ausgenommen a in Frage.

Diese bilden Variationen von 3 Buchstaben aus 6 Buchstaben. Somit gibt es $\binom{6}{3} \cdot 3!$

Wörter, die mit a enden. Gleichermaßen kann der letzte Buchstabe e sein; daher

kommen noch einmal $\binom{6}{3} \cdot 3!$ Wörter dazu. Insgesamt also $\binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 2 = 240$ Wörter

2.18 Bezeichnen A, B, C, D, E und F die 6 Personen der Kommission, so wäre etwa CADF gegen BE eine Mehrheit 4 zu 2. Insgesamt kann man $\binom{6}{2}$ mal zwei Personen wie BE gegen 4 Personen wie CADF herausgreifen (oder $\binom{6}{4}$ Personen gegen 2 Personen) usw.

Mehrheiten 4 zu 2: $\binom{6}{2} = 15$; Mehrheiten 5 zu 1: $\binom{6}{1} = 6$; Mehrheiten 6 zu 0: $\binom{6}{0} = 1$.
Insgesamt daher $15 + 6 + 1 = 22$ Möglichkeiten

2.19 **a)** Es gibt $\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = \frac{6}{1} = 6$ Möglichkeiten, aus den 6 richtigen Zahlen Auswahlen von 5 richtigen zu bilden. 6 Tipps enthalten also 5 richtige Zahlen. Die Zusatzzahl kommt als sechste Zahl zu jedem der 6 Tipps. Damit gibt es 6 Tipps mit 5 richtigen Zahlen und der Zusatzzahl

b) Es gibt wieder $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten, aus den 6 richtigen Zahlen Auswahlen von 5 richtigen zu bilden. Als sechste Zahl in einem solchen Tipp kommt eine Zahl dazu, die weder eine richtige noch die Zusatzzahl ist. Von solchen Zahlen gibt es $45 - 6 - 1 = 38$. Jede dieser Zahlen kommt in Frage. Somit gibt es $\binom{6}{5} \cdot 38 = 228$ der gefragten Tipps.

c) Es gibt $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ Möglichkeiten, aus den 6 richtigen Zahlen Auswahlen von 4 richtigen zu bilden. Weiters gibt es $\binom{39}{2} = \frac{39 \cdot 38}{1 \cdot 2} = 741$ Auswahlen von zwei Zahlen, welche aus den restlichen 39 nicht richtigen Zahlen gebildet werden können. Die 4 richtigen und die zwei falschen Zahlen können beliebig miteinander zu einem Tipp von 6 Zahlen zusammengefasst werden. Insgesamt gibt es damit $\binom{6}{4} \cdot \binom{39}{2} = 11\,115$ der gefragten Tipps.

d) Analog wie c). $\binom{6}{3} \cdot \binom{39}{3} = 20 \cdot 9139 = 182\,780$ Tipps, welche 3 richtige Zahlen enthalten.

e) Es gibt $\binom{39}{6} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 3\,262\,623$ Möglichkeiten, aus den 39 nicht richtigen Zahlen 6 Zahlen herauszugreifen. Es gibt also 3 262 623 Tipps, die keine einzige richtige Zahl enthalten.

2.20 L ... Lampe leuchtet, B ... Lampe blinkt, N ... Lampe leuchtet nicht.

a) Eine Lampe: L, B, ~~N~~: $3^1 - 1 =$ 2 Personen

b) Zwei Lampen: LL, LB, BL, BB, LN, NL, BN, NB, ~~NN~~: Variationen mit Wiederholung von k = 2 Elementen aus n = 3 Elementen ohne die Variation NN;
Anzahl: $n^k = 3^2 - 1 = 8$ Personen

c) Drei Lampen: LLL, ... , NNB, ~~NNN~~: Variationen mit Wiederholung von k = 3 Elementen aus n = 3 Elementen ohne die Variation NNN; Anzahl: $n^k = 3^3 - 1 = 26$ Personen

d) Vier Lampen: LLLL, ... , NNNB, ~~NNNN~~: Variationen mit Wiederholung von k = 4 Elementen aus n = 3 Elementen ohne die Variation NNNN;
Anzahl: $n^k = 3^3 - 1 = 80$ Personen

2.21 **a)** Anzahl der Kombinationen von k = 4 Elementen aus n = 20 Elementen: $\binom{20}{4} = 4845$

b) Es gibt $\binom{3}{1}$ Möglichkeiten, aus 3 fehlerhaften eine fehlerhafte Einheit auszuwählen. Weiters gibt es $\binom{17}{3}$ Möglichkeiten, aus 17 einwandfreien Einheiten 3 einwandfreie Einheiten auszuwählen. Insgesamt gibt es somit $\binom{3}{1}\cdot\binom{17}{3} = 3\cdot 680 = 2040$ Stichproben der verlangten Art.

2.22 **a)** Kombinationen von k = 4 Elementen aus n = 12 Elementen: $\binom{12}{4} = 495$ samples

b) Kombinationen von k = 4 Elementen aus 9 Elementen: $\binom{9}{4} = 126$ samples

c) Hier ist zu klären, wie oft man
1 verdorbenen Apfel aus 3 verdorbenen sowie 3 gute Äpfel aus 9 guten sowie
2 verdorbene Äpfel aus 3 verdorbenen sowie 2 gute Äpfel aus 9 guten sowie
3 verdorbene Äpfel aus 3 verdorbenen sowie 1 guten Apfel aus 9 guten
auswählen kann: $\binom{3}{1}\cdot\binom{9}{3}+\binom{3}{2}\cdot\binom{9}{2}+\binom{3}{3}\cdot\binom{9}{1} = 3\cdot 84 + 3\cdot 36 + 1\cdot 9 = 369$ samples.
Oder: 495 – 126 = 369 ... siehe a) und b)

2.23 Hier ist zu klären, wie oft man 2 Mädchen aus 4 Mädchen sowie 2 Burschen aus 4 Burschen auswählen kann: $\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{2} = 6\cdot 10 = 60$ Arten

2.24 **a)** Beispiele: KZKZZZZZ, ZZKZZZKZ, ZKZZZKZZ, ... ; man kann auch schreiben: 13, 37, 26, ... , d.h. man gibt die Nummer des Auftretens von Z an. 13 ist gleich 31 usw., d.h. es kommt nicht auf die Reihenfolge an. Daher kann man das Problem auch wie folgt formulieren: Wie oft kann man verschieden zwei Ziffern aus den 8 Ziffern 1, 2, 3, ... , 8 auswählen?

Kombinationen von k = 2 Elementen aus n = 8 Elementen; Anzahl: $\binom{8}{2} = 28$ Wurffolgen

b) Höchstens zweimal = niemals oder einmal oder zweimal;
$\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2} = 1 + 8 + 28 = 37$ Wurffolgen

c) Mindestens zweimal = zweimal oder dreimal oder viermal oder ... oder achtmal;
$\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8} = 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 247$ Wurffolgen;
Lösungsvariante: Mindestens zweimal = nicht höchstens einmal; insgesamt gibt es
$2^8 = 256$ Wurfolgen; $256 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} = 247$ Wurffolgen

2.25 **a)** Stets besteht eine Route aus 7 + 4 = 11 Teilwegen. Beispielsweise ist RORROORRRRO eine Route von A nach B. Sie kann kürzer etwa auch in der Form 2 5 6 11 angegeben werden. Dabei geben die 4 Zahlen die Nummern des Auftretens von O an. Daher kann man das Problem auch wie folgt formulieren: Wie oft kann man auf verschiedene Weise vier Zahlen aus den 11 Zahlen 1, 2, 3, ... ,11 auswählen?

Kombinationen von k = 4 Elementen aus n = 11 Elementen; Anzahl: $\binom{11}{4} = 330$ Routen

b) A nach C: Stets 6 Teilwege, davon genau zweimal O. C nach B: stets 5 Teilwege, davon genau zweimal O; $\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{2} = 15\cdot 10 = 150$ Routen

2.26 Man wählt zuerst 8 Schüler aus 20 Schülern, danach 7 Schüler aus den restlichen 15 Schülern; es bleiben noch 5 Schüler. Man kann auch zuerst 5 Schüler aus 20 Schülern und danach 7 Schüler aus den restlichen 15 Schülern auswählen usw.

$\binom{20}{8}\cdot\binom{12}{7} = 125970 \cdot 792 = 99\,768\,240$ Arten oder $\binom{20}{5}\cdot\binom{15}{7} = 15504 \cdot 6435 = 99\,768\,240$ Arten

2.27 1 Zwölfer; dies kann auch in der Form $\binom{12}{0}\cdot 2^0 = 1$ Zwölfer geschrieben werden.

Ein Elfer liegt vor, wenn eine Abweichung vom Zwölfer genau an einer der Stellen 1, 2, 3, ... , 12 vorliegt. Es gibt $\binom{12}{1}$ Möglichkeiten, eine solche Stelle aus 12 Stellen auszuwählen.

Die Abweichung an dieser Stelle kann zweifach ausfallen: Ist dort etwa 1 der richtige Tipp, so sind 2 oder x die beiden möglichen Abweichungen. Also gibt es $\binom{12}{1}\cdot 2 = \binom{12}{1}\cdot 2^1 = 24$ Elfer.

Ein Zehner liegt vor, wenn eine Abweichung vom Zwölfer genau an zwei der Stellen 1, 2, 3, ... , 12 vorliegt. Es gibt $\binom{12}{2}$ Möglichkeiten, zwei Stellen aus 12 Stellen auszuwählen. Die Abweichungen an diesen beiden Stellen können vierfach ausfallen: Sind dort etwa 11 die richtigen Tipps, so sind 22, 2x, x2 oder xx die möglichen Abweichungen (Variationen von k = 2 Elementen aus n = 2 Elementen). Es gibt daher $\binom{12}{2}\cdot 2^2 = 264$ Zehner.

Entsprechend argumentiert man die $\binom{12}{3}\cdot 2^3 = 1760$ Neuner.

Anmerkung: Alle Tipps zusammen müssen 3^{12} ergeben.

$$3^{12} = (1+2)^{12} = \binom{12}{0}\cdot 1^{12}\cdot 2^0 + \binom{12}{1}\cdot 1^{11}\cdot 2^1 + \ldots + \binom{12}{k}\cdot 1^{12-k}\cdot 2^k + \ldots + \binom{12}{12}\cdot 1^0\cdot 2^{12},$$

was nach dem Binomischen Lehrsatz richtig ist.

2.28 **a)** 12 mod 7 = 26 mod 7 = 5, richtig
b) 15 mod 5 = 10 mod 5 = 0, richtig
c) 18 mod 3 = 0, 14 mod 3 = 2, falsch
d) 18 mod 2 = 0, 15 mod 2 = 1, falsch
e) 64 mod 13 = 38 mod 13 = 12, richtig
f) 98 mod 8 = 58 mod 8 = 2, richtig
g) 117 mod 29 = 88 mod 29 = 1, richtig
h) 112 mod 17 = 10, 62 mod 17 = 11, falsch

2.29 **a)** 5 mod 12 = 5 **b)** 13 mod 12 = 1 **c)** 24 mod 12 = 0
d) 38 mod 12 = 2 **e)** 118 mod 12 = 10 **f)** 333 mod 12 = 9

2.30 **a)** 38 mod 3 = 2; 2 + 3 = 5; 5 + 3 = 8
b) 48 mod 4 = 0; 0 + 4 = 4; 4 + 4 = 8
c) 66 mod 7 = 3; 3 + 7 = 10; 10 + 7 = 17
d) 82 mod 9 = 1; 1 + 9 = 10; 10 + 9 = 19
e) 91 mod 12 = 7; 7 + 12 = 19; 19 + 12 = 31

2.31 **a)** $10\cdot 3 + 9\cdot 4 + 8\cdot 4 + 7\cdot 6 + 6\cdot 1 + 5\cdot 9 + 4\cdot 8 + 3\cdot 7 + 2\cdot 3 + 3 = 253$; 253 : 11 = 23, Rest 0; $253 \equiv 0$, ja
b) $10\cdot 3 + 9\cdot 4 + 8\cdot 1 + 7\cdot 1 + 6\cdot 0 + 5\cdot 6 + 4\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 5 = 137$; 137 : 11 = 12, Rest 5; $253 \equiv 5$, nein
c) $10\cdot 0 + 9\cdot 4 + 8\cdot 7 + 7\cdot 1 + 6\cdot 1 + 5\cdot 7 + 4\cdot 0 + 3\cdot 2 + 2\cdot 7 + 5 = 165$; 165 : 11 = 15, Rest 0; $165 \equiv 0$, ja

2.32 **a)** $9 + 3\cdot 7 + 8 + 3\cdot 3 + 8 + 3\cdot 1 + 7 + 3\cdot 1 + 2 + 3\cdot 0 + 0 + 3\cdot 3 + 1 = 80$; $80 \equiv 0$; ja
b) $3 + 3\cdot 0 + 4 + 3\cdot 5 + 1 + 3\cdot 4 + 0 + 3\cdot 1 + 0 + 3\cdot 5 + 5 + 3\cdot 0 + 2 = 60$; $60 \equiv 0$; ja
c) $9 + 3\cdot 0 + 0 + 3\cdot 3 + 7 + 3\cdot 4 + 0 + 3\cdot 0 + 5 + 3\cdot 1 + 3 + 3\cdot 4 + 3 = 63$; $63 \equiv 3$; nein

2.33 **a)** Modul 5: $23\cdot 18 \equiv 3\cdot 3 = 9 \equiv 4$; $23\cdot 18 \bmod 5 = 4$
b) Modul 7: $19\cdot 37\cdot 22 \equiv 5\cdot 2\cdot 1 = 10 \equiv 3$; $19\cdot 37\cdot 22 \bmod 7 = 3$
c) Modul 9: $41\cdot 23\cdot 25 \equiv 5\cdot 5\cdot 7 = 25\cdot 7 \equiv 7\cdot 7 = 49 \equiv 4$; $41\cdot 23\cdot 25 \bmod 9 = 4$
d) Modul 11: $49\cdot 78\cdot 25 \equiv 5\cdot 1\cdot 3 = 15 \equiv 4$; $49\cdot 78\cdot 25 \bmod 11 = 4$
e) Modul 25: $181\cdot 208\cdot 54 \equiv 6\cdot 8\cdot 4 = 192 \equiv 17$; $181\cdot 208\cdot 54 \bmod 25 = 17$
f) Modul 12: $34\cdot 68\cdot 108 \equiv 10\cdot 8\cdot 0 = 0 \equiv 0$; $34\cdot 68\cdot 108 \bmod 12 = 0$

2.34 **a)** Modul 9:
$4^2 = 16 \equiv 7$; $4^4 = (4^2)^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 4$;
$4^8 = (4^4)^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 7$; $4^8 \bmod 9 = 7$

b) $18^{10} = 18^{8+2}$; Modul 7:
$18^1 \equiv 4$; $18^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 2$; $18^4 = (18^2)^2 \equiv 2^2 = 4$;
$18^8 = (18^4)^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 2$; $18^{10} = 18^8\cdot 18^2 \equiv 2\cdot 2 = 4$;
$18^{10} \bmod 7 = 4$

c) $82^{12} = 82^{8+4}$; Modul 19:
$82 \equiv 6$; $82^2 \equiv 6\cdot 6 = 36 \equiv 17$
$82^4 = (82^2)^2 \equiv 17^2 = 289 \equiv 4$;
$82^8 = (82^4)^2 \equiv 4^2 = 16$
$82^{12} = 82^8\cdot 82^4 \equiv 16\cdot 4 = 64 \equiv 7$
$82^{12} \bmod 19 = 7$

d) $41^{13} = 41^{8+4+1}$; Modul 9:
$41 \equiv 5$; $41^2 \equiv 5^2 = 25 \equiv 7$; $41^4 = (41^2)^2 \equiv 7^2 = 49 \equiv 4$;
$41^8 = (41^4)^2 \equiv 4^2 = 16 \equiv 7$
$41^{13} = 41^8\cdot 41^4\cdot 41 \equiv 7\cdot 4\cdot 5 = 140 \equiv 5$
$41^{13} \bmod 9 = 5$

e) $23^{15} = 23^{8+4+2+1}$; Modul 7:
$23 \equiv 2$; $23^2 \equiv 2^2 = 4$; $23^4 \equiv 4^2 = 16 \equiv 2$;
$23^8 \equiv 2^2 = 4$;
$23^{15} = 23^8\cdot 23^4\cdot 23^2\cdot 23 \equiv 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2 = 64 \equiv 1$;
$23^{15} \bmod 7 = 1$

f) $81^{17} = 81^{16}\cdot 81$; Modul 20:
$81 \equiv 1$; $81^2 \equiv 1^2 = 1$; $81^4 \equiv 1^2 = 1$; $81^8 \equiv 1^2 = 1$;
$81^{16} \equiv 1^1 = 1$; $81^{17} = 81^{16}\cdot 81 \equiv 1\cdot 1 = 1$;
$81^{17} \bmod 20 = 1$

g) $39^{19} = 39^{16+2+1}$; Modul 30:
$39 \equiv 9$; $39^2 \equiv 9^2 = 81 \equiv 21$; $39^4 \equiv 21^2 = 441 \equiv 21$;
$39^8 \equiv 21^2 = 441 \equiv 21$; $39^{16} \equiv 21^2 = 441 \equiv 21$;
$39^{19} = 39^{16}\cdot 39^2\cdot 39 \equiv 21\cdot 21\cdot 9 = 21^2\cdot 9 \equiv 21\cdot 9 = 189 \equiv 9$;
$39^{19} \bmod 30 = 9$

h) $32^{20} = 32^{16+4}$; Modul 40
$32 \equiv 32$; $32^2 \equiv 32\cdot 32 = 1024 \equiv 24$;
$32^4 \equiv 24^2 = 576 \equiv 16$;
$32^8 \equiv 16^2 = 256 \equiv 16$;
$32^{16} \equiv 16^2 = 256 \equiv 16$;
$32^{20} = 32^{16}\cdot 32^4 \equiv 16\cdot 16 = 256 \equiv 16$;
$32^{20} \bmod 40 = 16$

2.35 **a)** $3^{101} = 3^{64+32+4+1}$; Modul 10:
$3^1 \equiv 3$; $3^2 \equiv 3\cdot 3 = 9$; $3^4 \equiv 9\cdot 9 = 81 \equiv 1$; $3^8 \equiv 1^2 = 1$; $3^{16} \equiv 1^2 = 1$; $3^{32} \equiv 1^2 = 1$;
$3^{64} \equiv 1^2 = 1$; $3^{101} = 3^{64}\cdot 3^{32}\cdot 3^4\cdot 3 \equiv 1\cdot 1\cdot 1\cdot 3 = 3$; $3^{101} \bmod 10 = 3$

b) $3^{2000} = 3^{1024+512+256+128+64+16}$; Modul 7:
$3^1 \equiv 3$; $3^2 \equiv 3\cdot 3 = 9 \equiv 2$; $3^4 \equiv 2\cdot 2 = 4$; $3^8 \equiv 4^2 = 16 \equiv 2$; $3^{16} \equiv 2^2 = 4$; $3^{32} \equiv 4^2 = 16 \equiv 2$;
$3^{64} \equiv 2^2 = 4$; $3^{128} \equiv 4^2 = 16 \equiv 2$; $3^{256} \equiv 2^2 = 4$; $3^{512} \equiv 4^2 = 16 \equiv 2$; $3^{1024} \equiv 2^2 = 4$;
$3^{2000} = 3^{1024}\cdot 3^{576}\cdot 3^{256}\cdot 3^{128}\cdot 3^{16} \equiv 4\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 4\cdot 4 = 8\cdot 8\cdot 16 \equiv 1\cdot 1\cdot 2 = 2$; $3^{2000} \bmod 7 = 2$

c) $2138^{100} = 2138^{64+32+4}$; Modul 4318:
$2138^1 \equiv 2138$; $2138^2 \equiv 2138^2 = 4571044 \equiv 2600$, weil $4571044 : 4328 = 1058$, Rest 2600;
$2138^4 \equiv 2600^2 = 6760000 \equiv 2330$; $2138^8 \equiv 2330^2 = 5428900 \equiv 1174$;
$2138^{16} \equiv 1174^2 = 1378276 \equiv 834$; $2138^{32} \equiv 834^2 = 695556 \equiv 358$;
$2138^{64} \equiv 358^2 = 128164 \equiv 2942$;
$2138^{100} = 2138^{64}\cdot 2138^{32}\cdot 2138^4 \equiv 2942\cdot 358\cdot 2330 = 2454039880 \equiv 3894$;
$2138^{100} \bmod 4318 = 3894$

2.35 **d)** $6310^{123} = 6310^{64+32+16+8+2+1}$; Modul 7148:
$6310^1 \equiv 6310$; $6310^2 \equiv 6310^2 = 39816100 \equiv 1740$; $6310^4 \equiv 1740^2 \equiv 3996$; $6310^8 \equiv 3996^2 \equiv 6532$;
$6310^{16} \equiv 6532^2 \equiv 612$; $6310^{32} \equiv 612^2 \equiv 2848$; $6310^{64} \equiv 2848^2 \equiv 5272$;
$6310^{123} \equiv 6310^{64} \cdot 6310^{32} \cdot 6310^{16} \cdot 6310^8 \cdot 6310^2 \cdot 6310 \cdot \equiv 5272 \cdot 2848 \cdot 612 \cdot 6532 \cdot 1740 \cdot 6310 \equiv 4528$;
6310^{123} mod 7148 = 4528.
Stufenweise Restbestimmung (etwa mit *Excel*): $5272 \cdot 2848 \cdot 612 \equiv 1032$; $6532 \cdot 1740 \cdot 6310 \equiv 5684$;
$1032 \cdot 6310 \equiv 4528$

e) $4200^{413} = 4200^{256+128+16+8+4+1}$; Modul 5284:
$4200^1 \equiv 4200$; $4200^2 \equiv 4200^2 \equiv 2008$; $4200^4 \equiv 2008^2 \equiv 372$; $4200^8 \equiv 372^2 \equiv 1000$;
$4200^{16} \equiv 1000^2 \equiv 1324$; $4200^{32} \equiv 1324^2 \equiv 3972$; $4200^{64} \equiv 3972^2 \equiv 4044$; $4200^{128} \equiv 4044^2 \equiv 5240$;
$4200^{256} \equiv 5240^2 \equiv 1936$;
$4200^{413} = 4200^{256} \cdot 4200^{128} \cdot 4200^{16} \cdot 4200^8 \cdot 4200^4 \cdot 4200 \equiv 1936 \cdot 5240 \cdot 1324 \cdot 1000 \cdot 372 \cdot 4200 \equiv 4512$;
4200^{413} mod 5284 = 4512.
Stufenweise Restbestimmung (etwa mit *Excel*): $1936 \cdot 5240 \cdot 1324 \equiv 3364$; $1000 \cdot 372 \cdot 4200 \equiv 460$;
$3364 \cdot 460 \equiv 4512$

f) $2817^{385} = 2817^{256+128+1}$; Modul 4281;
$2817^1 \equiv 2817$; $2817^2 \equiv 2817^2 \equiv 2796$; $2817^4 \equiv 2796^2 \equiv 510$; $2817^8 \equiv 510^2 \equiv 3240$;
$2817^{16} \equiv 3240^2 \equiv 588$; $2817^{32} \equiv 588^2 \equiv 3264$; $2817^{64} \equiv 3264^2 \equiv 2568$; $2817^{128} \equiv 2568^2 \equiv 1884$;
$2817^{256} \equiv 1844^2 \equiv 507$;
$2817^{385} = 2817^{256} \cdot 2817^{128} \cdot 2817 \equiv 507 \cdot 1884 \cdot 2817 \equiv 1980$; 2817^{385} mod 4281 = 1980

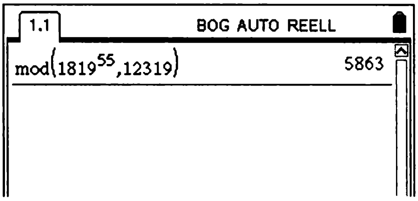
g) $813^{619} = 813^{512+64+32+8+2+1}$; Modul 5372:
$813^1 \equiv 813$; $813^2 \equiv 813^2 \equiv 213$; $813^4 \equiv 213^2 \equiv 2393$; $813^8 \equiv 2393^2 \equiv 5269$;
$813^{16} \equiv 5269^2 \equiv 5237$; $813^{32} \equiv 5237^2 \equiv 2109$; $813^{64} \equiv 2109^2 \equiv$; $813^{128} \equiv 5237^2 \equiv 2109$;
$813^{256} \equiv 2109^2 \equiv 5237$; $813^{512} \equiv 5237^2 \equiv 2109$;
$813^{619} = 813^{512} \cdot 813^{64} \cdot 813^{32} \cdot 813^8 \cdot 813^2 \cdot 813 \equiv 2109 \cdot 5237 \cdot 2109 \cdot 5269 \cdot 213 \cdot 813 \equiv 1761$;
813^{619} mod 5372 = 1761.
Stufenweise Restbestimmung (etwa mit *Excel*): $2109 \cdot 5237 \cdot 2109 \equiv 2109$; $5269 \cdot 213 \cdot 813 \equiv 4005$;
$2109 \cdot 4005 \equiv 1761$

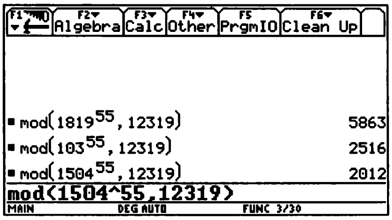
h) $4851^{830} = 4851^{512+256+32+16+8+4+2}$; Modul 9777:
$4851^1 \equiv 4851$; $4851^2 \equiv 4851^2 \equiv 8739$; $4851^4 \equiv 8739^2 \equiv 1974$; $4851^8 \equiv 1974^2 \equiv 5430$;
$4851^{16} \equiv 5430^2 \equiv 7245$; $4851^{32} \equiv 7245^2 \equiv 7089$; $4851^{64} \equiv 7089^2 \equiv 141$; $4851^{128} \equiv 141^2 \equiv 327$;
$4851^{256} \equiv 327^2 \equiv 9159$; $4851^{512} \equiv 9159^2 \equiv 621$;
$4851^{830} \equiv 621 \cdot 9159 \cdot 7089 \cdot 7245 \cdot 5430 \cdot 1974 \cdot 8739 \equiv 534$; 4851^{830} mod 9777 = 534.
Stufenweise Restbestimmung (etwa mit *Excel*): $621 \cdot 9159 \cdot 7089 \equiv 4440$;$\cdot 7245 \cdot 5430 \equiv 7479$;
$1974 \cdot 8739 \equiv 4158$; $4440 \cdot 7479 \cdot 4158 \equiv 534$.

i) $3333^{412} = 3333^{256+128+16+8+4}$; Modul 12101:
$3333^1 \equiv 3333$; $3333^2 \equiv 3333^2 \equiv 171$; $3333^4 \equiv 171^2 \equiv 5039$; $3333^8 \equiv 5039^2 \equiv 3623$;
$3333^{16} \equiv 3623^2 \equiv 8645$; $3333^{32} \equiv 8645^2 \equiv 249$; $3333^{64} \equiv 249^2 \equiv 1496$; $3333^{128} \equiv 1496^2 \equiv 11432$;
$3333^{256} \equiv 11432^2 \equiv 11925$;
$3333^{412} \equiv 11925 \cdot 11432 \cdot 8645 \cdot 3623 \cdot 5039 \equiv 146$; 3333^{412} mod 12101 = 146.
Restbestimmung des Produktes $11925 \cdot 11432 \cdot 8645 \cdot 3623 \cdot 5039$ auch stufenweise.

2.36 $221 = 13 \cdot 17$; $p = 13$; $q = 17$; $d = \frac{1}{e} \cdot (1 + k \cdot (p-1) \cdot (q-1)) = \frac{1}{7} \cdot (1 + k \cdot 12 \cdot 16) = 55$ für $k = 2$;
$x = y^{55}$ mod 221 = 2^{55} mod 221;
$2^{55} = 2^{32+16+4+2+1}$; Modul 221: $2^1 \equiv 2$; $2^2 \equiv 2^2 = 4$; $2^4 \equiv 4^2 \equiv 16$; $2^8 \equiv 16^2 = 256 \equiv 35$;
$2^{16} \equiv 35^2 = 1225 \equiv 120$; $2^{32} \equiv 120^2 = 14400 \equiv 35$;
$2^{55} = 2^{32} \cdot 2^{16} \cdot 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2 \equiv 35 \cdot 120 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 2 = 537600 \equiv 128$; $x = 2^{55}$ mod 221 = 128 als Zahl im Klartext

2.37 Leerz. A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
RSACODE: 1819|0103|1504|0500 Blocklänge 4, letzter Block durch ein Leerzeichen aufgefüllt;
$y = x^e \bmod n$ mit $e = 55$ und dem Modul $n = 12319$; $55 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1$;
$x = 1819$: $1819^1 \equiv 1819$; $1819^2 \equiv 1819^2 \equiv 7269$; $1819^4 \equiv 7269^2 \equiv 2170$; $1819^8 \equiv 2170^2 \equiv 3042$;
$1819^{16} \equiv 3042^2 \equiv 2195$; $1819^{32} \equiv 2195^2 \equiv 1296$;
$1819^{55} = 1819^{32} \cdot 1819^{16} \cdot 1819^4 \cdot 1810^2 \cdot 1819 \equiv 1296 \cdot 2195 \cdot 2170 \cdot 7269 \cdot 1819 \equiv 5863$;
$1819^e \bmod n = 5863$
$x = 103$: $103^1 \equiv 103$; $103^2 \equiv 103^2 = 10609$; $1819^4 \equiv 10609^2 \equiv 4497$; $103^8 \equiv 4497^2 \equiv 7530$;
$103^{16} \equiv 7530^2 \equiv 8862$; $103^{32} \equiv 8862^2 \equiv 1419$;
$103^{55} = 103^{32} \cdot 103^{16} \cdot 103^4 \cdot 103^2 \cdot 103 \equiv 1419 \cdot 8862 \cdot 4497 \cdot 10609 \cdot 103 \cdot \equiv 2516$;
$103^e \bmod n = 2516$ usw.
$x = 1504$: $1504^e \bmod n = 2012$; $x = 500$: $500^e \bmod n = 111$;
chiffrierte Nachricht: 5863, 2516, 2012, 111





2.38 $n = 1763 = 41 \cdot 43$; $p = 41$; $q = 43$; $d = \frac{1}{e} \cdot (1 + k \cdot (p-1) \cdot (q-1)) = \frac{1}{19} \cdot (1 + k \cdot 40 \cdot 42) = 619$ für $k = 7$;
$x = y^d \bmod n$ mit $d = 619$ und dem Modul $n = 1763$; $619 = 512 + 64 + 32 + 8 + 2 + 1$;
$y = 118$: $118^1 \equiv 118$; $118^2 \equiv 118^2 \equiv 1583$; $118^4 \equiv 1583^2 \equiv 666$; $118^8 \equiv 666^2 \equiv 1043$;
$118^{16} \equiv 1043^2 \equiv 78$; $118^{32} \equiv 78^2 \equiv 795$; $118^{64} \equiv 795^2 \equiv 871$; $118^{128} \equiv 871^2 \equiv 551$;
$118^{256} \equiv 551^2 \equiv 365$; $118^{512} \equiv 365^2 \equiv 1000$;
$118^{619} \equiv 1000 \cdot 871 \cdot 795 \cdot 1043 \cdot 1583 \cdot 118 \equiv 131$; $118^{619} \bmod n = 131$ usw.
$y = 462$: $462^{619} \bmod n = 518$; $y = 65$: $65^{619} \bmod n = 70$; $y = 54$: $54^{619} \bmod n = 514$;
damit lautet der Klartext als Ziffernfolge in Blöcken der Länge 3: 131|518|070|514;
Leerz. A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
$\Rightarrow$ MORGEN als Klartext in Buchstaben.
Excel:

	A	B	C	D	E
1	y =	118	462	65	54
2	Exponent	Rest	Rest	Rest	Rest
3	1	118	462	65	54
4	2	1583	121	699	1153
5	4	666	537	250	107
6	8	1043	1000	795	871
7	16	78	379	871	551
8	32	795	838	551	365
9	64	871	570	365	1000
10	128	551	508	1000	379
11	256	365	666	379	838
12	512	1000	1043	838	570
13					
14		538	796	481	322
15		305	262	385	133
16	x =	**131**	**518**	**70**	**514**

	A	B
1	y =	118
2	Exponent	Rest
3	1	=REST(118;1763)
4	=A3*2	=REST(B3^2;1763)
5	=A4*2	=REST(B4^2;1763)
6	=A5*2	=REST(B5^2;1763)
7	=A6*2	=REST(B6^2;1763)
8	=A7*2	=REST(B7^2;1763)
9	=A8*2	=REST(B8^2;1763)
10	=A9*2	=REST(B9^2;1763)
11	=A10*2	=REST(B10^2;1763)
12	=A11*2	=REST(B11^2;1763)
13		
14		=REST(B3*B4*B6;1763)
15		=REST(B8*B9*B12;1763)
16	x =	**=REST(B14*B15;1763)**

Die Restbestimmung etwa des Produktes $118 \cdot 1563 \cdot \ldots \cdot 1000$ auf einmal ist in *Excel* nicht möglich. Daher wird zuerst der Rest des Produktes etwa der ersten drei Faktoren und danach des Produktes der restlichen Faktoren ermittelt. Anschließend wird der Rest des Produktes der beiden Teilprodukte bestimmt. Die Formelansicht zeigt dies für den ersten Ziffernblock $y = 118$.

2.39 $n = 1073 = 29 \cdot 37$; $p = 29$; $q = 37$; $d = \frac{1}{e} \cdot (1 + k \cdot (p-1) \cdot (q-1)) = \frac{1}{25} \cdot (1 + k \cdot 28 \cdot 36) = 121$ für $k = 3$;
$x = y^d \bmod n$ mit $d = 121$ und dem Modul $n = 1073$; $121 = 64 + 32 + 16 + 8 + 1$;
$y = 6$: $6^1 \equiv 6$; $6^2 \equiv 6^2 = 36$; $6^4 \equiv 36^2 \equiv 223$; $6^8 \equiv 223^2 \equiv 371$; $6^{16} \equiv 371^2 \equiv 297$; $6^{32} \equiv 297^2 \equiv 223$;
$6^{64} \equiv 223^2 \equiv 371$; $6^{121} \equiv 371 \cdot 223 \cdot 297 \cdot 371 \cdot 6 \equiv 80$; $6^{121} \bmod n = 80$ usw.
$y = 337$: $337^{121} \bmod n = 114$; $y = 744$: $744^{121} \bmod n = 40$;
damit lautet der Klartext als Ziffernfolge in Blöcken der Länge 3: 080|114|040;

Leerz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

$\Rightarrow$ HAND als Klartext in Buchstaben.
Anmerkung: HAND als Klartext in Buchstaben ergibt die Ziffernfolge 08011404, die bei einer Aufteilung in Blöcke der Länge 3 noch durch zwei Leerzeichen zu ergänzen ist: 080|114|040|000.

Mathcad: $n := 1073$ $\quad d := 121$ $\quad \mathrm{mod}(6^d, n) \to 80$ $\quad \mathrm{mod}(337^d, n) \to 114$ $\quad \mathrm{mod}(744^d, n) \to 40$

2.40 **a)**

Leerz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

FOTO $\Rightarrow$ 06152015 bzw. in Blöcken der Länge 3 (am Ende werden zur Auffüllung noch zwei Leerzeichen angefügt): 061|520|150|000;
$y = x^e \bmod n$ mit $e = 29$ und $n = 1333$: $29 = 16 + 8 + 4 + 1$;
$x = 61$: $61^1 \equiv 61$; $61^2 \equiv 61^2 \equiv 1055$; $61^4 \equiv 1055^2 \equiv 1303$; $61^8 \equiv 1303^2 \equiv 900$; $61^{16} \equiv 900^2 \equiv 869$;
$61^{29} \equiv 869 \cdot 900 \cdot 1303 \cdot 61 \equiv 433$ (Restbestimmung auch stufenweise);
$x = 520$: $520^{29} \equiv 735$; $520^{29} \bmod n = 735$; $x = 150$; $150^{29} \equiv 967$; $150^{29} \bmod n = 967$.
Verschlüsselte Nachricht: 433, 735, 967 (der Nullenblock braucht nicht chiffriert werden)

b) $n = 1333 = 31 \cdot 43$; $p = 31$; $q = 43$; geheimer Schlüssel d:

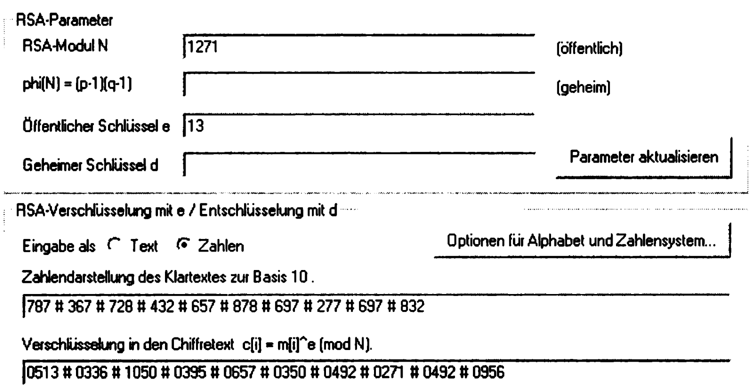
$$d = \frac{1}{e} \cdot (1 + k \cdot (p-1) \cdot (q-1)) = \frac{1}{29} \cdot (1 + k \cdot 30 \cdot 42) = 869 \text{ für } k = 20.$$

Dechiffrierung durch $x = y^d \bmod n$ mit $d = 869$ und dem Modul $n = 1333$;
Etwa $433^{869} \bmod n = 61$ usw.

2.41

Leerz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
32	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90.

NICHT ANNEHMEN $\Rightarrow$ 787|367|728|432|657|878|697|277|697|832 (am Ende wird zum Auffüllen auf einen vollen Dreierblock noch ein Leerzeichen angefügt);
$y = x^e \bmod n$ mit $e = 13$ und $n = 1271$: $13 = 8 + 4 + 1$;
$x = 787$: $787^1 \equiv 787$; $787^2 \equiv 787^2 = 619369 \equiv 392$; $787^4 \equiv 392^2 \equiv 1144$; $787^8 \equiv 1144^2 \equiv 877$;
$787^{13} \equiv 877 \cdot 1144 \cdot 787 \equiv 513$; $787^{13} \bmod n = 513$; usw.
$367^{13} \bmod n = 336$; $728^{13} \bmod n = 1050$; $432^{13} \bmod n = 395$; $657^{13} \bmod n = 657$;
$878^{13} \bmod n = 350$; $697^{13} \bmod n = 492$; $277^{13} \bmod n = 271$; $697^{13} \bmod n = 492$; $832^{13} \bmod n = 956$;
Verschlüsselte Nachricht: 513, 336, 1050, 395, 657, 350, 492, 271, 492, 956.



Cryptool,
frei erhältliches
E–Learning–Programm
unter
http://www.cryptool.de/

2.42 $y = x^e \bmod n$ mit $e = 43$ und $n = 1517$; $43 = 32 + 8 + 2 + 1$:
$x = 106$: $106^1 \equiv 106$; $106^2 \equiv 106^2 \equiv 617$; $106^4 \equiv 617^2 \equiv 1439$; $617^8 \equiv 1439^2 \equiv 16$; $617^{16} \equiv 16^2 \equiv 256$;
$617^{32} \equiv 256^2 \equiv 305$; $617^{43} \equiv 305 \cdot 16 \cdot 617 \cdot 106 \equiv 130$; $106^{43} \bmod n = 130$; usw.
$1308^{43} \bmod n = 920$; $106^{43} \bmod n = 130$; $156^{43} \bmod n = 103$; $364^{43} \bmod n = 80$;
$71^{43} \bmod n = 514$;
Klartext: 130, 920, 130, 103, 080, 514 oder 13 09 20 13 01 03 08 05 14

Leerzeichen	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26;

$\Rightarrow$ MITMACHEN, d.h. die Nachricht ist gültig unterschrieben

2.43 $n = 323 = 17 \cdot 19$; $p = 17$; $q = 19$; geheimer Schlüssel d:
$$d = \frac{1}{e} \cdot (1 + k \cdot (p-1) \cdot (q-1)) = \frac{1}{35} \cdot (1 + k \cdot 16 \cdot 18) = 107 \text{ für } k = 13.$$
Dechiffrierung durch $x = y^d \bmod n$ mit $d = 107$ und dem Modul $n = 323$; $107 = 64 + 32 + 8 + 2 + 1$
$y = 108$: $108^1 \equiv 108$; $108^2 \equiv 108^2 \equiv 36$; $108^4 \equiv 36^2 \equiv 4$; $108^8 \equiv 4^2 = 16$; $108^{16} \equiv 16^2 = 256$;
$108^{32} \equiv 256^2 \equiv 290$; $108^{64} \equiv 290^2 \equiv 120$; $108^{107} \equiv 120 \cdot 290 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 108 \equiv 22$;
$108^{107} \bmod 323 = 22$. Die Chip-Karte muss die Zahl 22 zurückgeben.

2.44

a	b	$a \vee b$	$a \wedge (a \vee b)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

a	b	$a \wedge b$	$a \vee (a \wedge b)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

2.45
a) $a \wedge a \wedge a = a \wedge (a \wedge a) = a \wedge a = a$
b) $c \vee c \vee c = c \vee (c \vee c) = c \vee c = c$
c) $(b \wedge b) \vee c = b \vee c$
d) $(a \vee \bar{a}) \vee b = 1 \vee b = 1$
e) $a \wedge b \wedge \bar{b} = a \wedge (b \wedge \bar{b}) = a \wedge 0 = 0$
f) $(a \vee \bar{a}) \wedge b = 1 \wedge b = b$
g) $\bar{a} \vee (a \vee b) = (\bar{a} \vee a) \vee b = 1 \vee b = 1$
h) $\bar{a} \wedge (a \wedge b) = (\bar{a} \wedge a) \wedge b = 0 \wedge b = 0$
i) $(a \wedge \bar{b}) \vee b = b \vee (a \wedge \bar{b}) = (b \vee a) \wedge (b \vee \bar{b}) = (b \vee a) \wedge 1 = b \vee a = a \vee b$
j) $a \vee \overline{a \wedge b} = a \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \vee \bar{a}) \vee b = 1 \vee b = 1$
k) $\overline{\bar{a} \wedge b} \wedge b = (a \vee \bar{b}) \wedge b = b \wedge (a \vee \bar{b}) = (b \wedge a) \vee (\bar{b} \wedge b) = (a \wedge b) \vee 0 = a \wedge b$
l) $a \vee \overline{\bar{a} \vee b} = a \vee (a \wedge \bar{b}) = a$ nach (9b)
m) $a \wedge (a \vee \bar{b}) = a$ nach (9a)
n) $\bar{a} \wedge (a \vee b) = (\bar{a} \wedge a) \vee (\bar{a} \wedge b) = 0 \vee (\bar{a} \wedge b) = \bar{a} \wedge b$
o) $\bar{a} \vee (a \wedge b) = (\bar{a} \vee a) \wedge (\bar{a} \vee b) = 1 \wedge (\bar{a} \vee b) = \bar{a} \vee b$
p) $(\bar{a} \vee b) \wedge \bar{a} = \bar{a} \wedge (\bar{a} \vee b) = \bar{a}$ nach (9a)

2.46
a) $(a \wedge b) \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$
b) $(a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$
c) $(a \wedge b) \vee 1 = 1$
d) $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x \vee (y \wedge \bar{y}) = x \vee 0 = x$
e) $(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = \bar{x} \vee (y \wedge \bar{y}) = \bar{x} \vee 0 = \bar{x}$
f) $(a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge b) = a \wedge (\bar{b} \vee b) = a \wedge 1 = a$
g) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x \wedge (y \vee \bar{y}) = x \wedge 1 = x$

2.46 h) $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) = (y \vee x) \wedge (y \vee \bar{x}) = y \vee (x \wedge \bar{x}) = y \vee 0 = y$

i) $x \vee \left[(\bar{x} \vee y) \wedge \bar{y}\right] = x \vee \left[(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{y})\right] = x \vee \left[(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee 0\right] = (x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee \bar{y}) = x \vee \bar{y}$

j) $\left(\overline{\bar{x} \vee y} \vee y\right) \wedge \bar{x} = \left[(x \wedge \bar{y}) \vee y\right] \wedge \bar{x} = \left[(x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee y)\right] \wedge \bar{x} = \left[(x \vee y) \wedge 1\right] \wedge \bar{x} =$

$= (x \vee y) \wedge \bar{x} = (x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{x}) = 0 \vee (y \wedge \bar{x}) = \bar{x} \wedge y$

k) $\bar{x} \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge y = \left[\bar{x} \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})\right] \wedge \left[y \wedge (x \vee y)\right] = \bar{x} \wedge y$ nach (9a)

l) $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \wedge y) \vee \overline{x \wedge y} = 1$

m) $(a \wedge b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) = (a \wedge b) \wedge \overline{a \wedge b} = 0$

n) $(a \wedge b \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge \bar{b}) = (a \wedge 0) \vee (a \wedge \bar{b}) = 0 \vee (a \wedge \bar{b}) = a \wedge \bar{b}$

o) $a \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee b = a \vee b \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = (a \vee b) \vee \overline{a \vee b} = 1$

2.47 a) $a \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (b \wedge c) = \left[(a \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b)\right] \vee (b \wedge c) = \left[1 \wedge (a \vee b)\right] \vee (b \wedge c) =$

$= (a \vee b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b \vee b) \wedge (a \vee b \vee c) = (a \vee b) \wedge \left[(a \vee b) \vee c\right] = a \vee b$ nach (9a)

b) $\left[(a \vee b) \wedge c\right] \vee (\bar{b} \wedge c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c) = (a \wedge c) \vee \left[(b \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c)\right] =$

$= (a \wedge c) \vee \left[(b \vee \bar{b}) \wedge c)\right] = (a \wedge c) \vee \left[1 \wedge c)\right] = (a \wedge c) \vee c = c$ nach (9b)

c) $(a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee \overline{(a \vee \bar{b} \vee c)} = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) = \left[a \wedge (b \wedge \bar{c})\right] \vee \left[\bar{a} \wedge (b \wedge \bar{c})\right] =$

$= (a \vee \bar{a}) \wedge (b \wedge \bar{c}) = 1 \wedge (b \wedge \bar{c}) = b \wedge \bar{c}$

d) $\left[a \vee (b \wedge c)\right] \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) = \left[a \vee (b \wedge c)\right] \wedge \left[a \vee \overline{b \wedge c}\right] = a \vee \left[(b \wedge c) \wedge \overline{b \wedge c}\right] = a \vee 0 = a$

e) $\overline{(\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee \overline{(a \wedge b) \vee c}} = \bar{\bar{a}} \wedge \bar{\bar{b}} \wedge \left[(a \wedge b) \vee c\right] = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

f) $(a \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge c) = \left[(a \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge c)\right] \vee (\bar{b} \wedge c) = \left[(a \vee \bar{a}) \wedge c\right] \vee (\bar{b} \wedge c) =$

$= \left[1 \wedge c\right] \vee (\bar{b} \wedge c) = c \vee (\bar{b} \wedge c) = c$ nach (9b)

2.48 a) $a \vee (\bar{a} \wedge b) = (a \vee \bar{a}) \wedge (a \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) = a \vee b$, d.h. Parallelschaltung d. Arbeitskontakte a, b

b) $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) = (a \wedge \bar{a}) \vee b = 0 \vee b = b$, d.h. es genügt der Arbeitskontakt b

2.49 $f_1(x,y) = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$;

$f_2(x,y) = \overline{x \wedge y} \wedge (x \vee y) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y) =$

$= (\bar{x} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{y} \wedge y) = 0 \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee 0 = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = f_1(x,y)$

2.50 a) $(x \vee y) \wedge \bar{x} = (x \wedge \bar{x}) \vee (\bar{x} \wedge y) = 0 \vee (\bar{x} \wedge y) = \bar{x} \wedge y$

b) $(x \wedge y) \vee \bar{y} = (x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{y}) = (x \vee \bar{y}) \wedge 1 = x \vee \bar{y}$

c) $(x \wedge \bar{y}) \vee \bar{y} = \bar{y}$ nach dem Verschmelzungsgesetz (9b)

d) $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee \bar{x} = \bar{x}$ nach dem Verschmelzungsgesetz (9b)

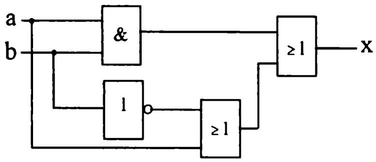
e) $\overline{x \wedge y} \vee (\bar{x} \wedge y) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) = \bar{x} \vee \bar{y} \vee (\bar{x} \wedge y) = \left[\bar{x} \vee (\bar{x} \wedge y)\right] \vee \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \wedge y}$ nach (9b)

f) $(x \vee y) \vee (x \wedge y) = x \vee [y \vee (x \wedge y)] = x \vee y$ nach (9b)

g) $z = \left[(a \vee b) \wedge c\right] \vee (\bar{b} \wedge c) = \left[(a \vee b) \vee \bar{b}\right] \wedge c = \left[a \vee (b \vee \bar{b})\right] \wedge c = \left[a \vee 1\right] \wedge c = 1 \wedge c = c$

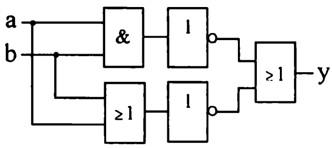
h) $z = \left[(a \vee \bar{b}) \vee b\right] \vee (a \wedge c) = \left[a \vee (\bar{b} \vee b)\right] \vee (a \wedge c) = \left[a \vee 1\right] \vee (a \wedge c) = 1 \vee (a \wedge c) = 1$

2.51 a)



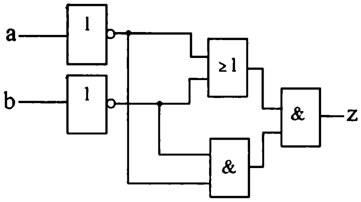
$x = (a \wedge b) \vee (a \vee \overline{b}) = (a \wedge b) \vee a \vee \overline{b} = [(a \wedge b) \vee a] \vee \overline{b} =$
$= a \vee \overline{b}$ nach dem Verschmelzungsgesetz (9b)

b)



$y = \overline{a \wedge b} \vee \overline{a \vee b} = (\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = \overline{a} \vee \overline{b} \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) =$
$= \overline{a} \vee [\overline{b} \vee (\overline{a} \wedge \overline{b})] = \overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a \wedge b}$ nach (9b)

c)



$z = (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \wedge \overline{b}) = (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge \overline{a} \wedge \overline{b} = [(\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge \overline{a}] \wedge \overline{b} =$
$= \overline{a} \wedge \overline{b} = \overline{a \vee b}$ nach (9a)

2.52 $f_1(x,y) = (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \wedge \overline{x}) \vee (y \wedge \overline{y}) = 0 \vee 0 = 0$

$f_2(x,y) = x \wedge y$; $\qquad f_3(x,y) = x \wedge \overline{y}$

$f_4(x,y) = (x \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y) = x \wedge (y \vee \overline{y}) = x \wedge 1 = x$ oder
$= (x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x \vee (y \wedge \overline{y}) = x \vee 0 = x$

$f_5(x,y) = \overline{x} \wedge y$

$f_6(x,y) = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge y) = (\overline{x} \vee x) \wedge y = 1 \wedge y = y$ oder
$= (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee y) = (x \wedge \overline{x}) \vee y = 0 \vee y = y$

$f_7(x,y) = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$ oder $= (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$

$f_8(x,y) = x \vee y$; $\qquad f_9(x,y) = \overline{x} \wedge \overline{y}$

$f_{10}(x,y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y)$ oder $= (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y)$

$f_{11}(x,y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y}) = (\overline{x} \vee x) \wedge \overline{y} = 1 \wedge \overline{y} = \overline{y}$ oder
$= (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) = (x \wedge \overline{x}) \vee \overline{y} = 0 \vee \overline{y} = \overline{y}$

$f_{12}(x,y) = x \vee \overline{y}$

$f_{13}(x,y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) = \overline{x} \wedge (\overline{y} \vee y) = \overline{x} \wedge 1 = \overline{x}$ oder
$= (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) = \overline{x} \vee (y \wedge \overline{y}) = \overline{x} \vee 0 = \overline{x}$

$f_{14}(x,y) = \overline{x} \vee y$; $\qquad f_{15}(x,y) = \overline{x} \vee \overline{y}$

$f_{16}(x,y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge y) = (\overline{x} \vee x) \wedge (\overline{y} \wedge y) = 1 \wedge 1 = 1$

2.53 **a)** $f_1(a,b,c) = (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c)$; substituiert man $T = a \wedge \bar{b}$, so erhält man
$f_1(a,b,c) = (T \wedge \bar{c}) \vee (T \wedge c) = T \wedge (\bar{c} \vee c) = T \wedge 1 = T = a \wedge \bar{b}$

b) $f_2(a,b,c) = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c)$; substituiert man $T = a \vee c$, so erhält man
$f_2(a,b,c) = (T \vee b) \wedge (T \vee \bar{b}) = T \vee (b \wedge \bar{b}) = T \vee 0 = T = a \vee c$

c) $f_3(a,b,c) = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$; substituiert man $T = a \vee b$, so ist
$(T \vee c) \wedge (T \vee \bar{c}) = T \vee (c \wedge \bar{c}) = T \vee 0 = T = a \vee b$. Damit:
$f_3(a,b,c) = (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) = a \vee \left[b \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})\right] = a \vee \left[(b \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{c})\right] =$
$= a \vee \left[0 \vee (b \wedge \bar{c})\right] = a \vee \left[(b \wedge \bar{c})\right] = a \vee (b \wedge \bar{c})$

d) $f_4(a,b,c) = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c)$. Setzt man $T = a \vee c$, so ist
$(T \vee b) \wedge (T \vee \bar{b}) = T \vee (b \wedge \bar{b}) = T \vee 0 = T = a \vee c$. Damit:
$f_4(a,b,c) = (a \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) = (a \vee c) \wedge \left[(\bar{a} \vee b) \vee c\right] = \left[a \wedge (\bar{a} \vee b)\right] \vee c = \left[(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b)\right] \vee c =$
$= \left[0 \vee (a \wedge b)\right] \vee c = \left[(a \wedge b)\right] \vee c = (a \wedge b) \vee c$

e) $f_5(a,b,c) = (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$. Substituiert man $T = \bar{b} \wedge \bar{c}$ sowie
$S = b \wedge c$, so ist $f_5(a,b,c) = (\bar{a} \wedge T) \vee (\bar{a} \wedge S) \vee (a \wedge T) \vee (a \wedge S)$.
$(\bar{a} \wedge T) \vee (a \wedge T) = (\bar{a} \vee a) \wedge T = 1 \wedge T = T$; $(\bar{a} \wedge S) \vee (a \wedge S) = (\bar{a} \vee a) \wedge S = 1 \wedge S = S$; damit:
$f_5(a,b,c) = T \vee S = (\bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c)$.
Man kann weiter umformen, wohin man auch mit der KNF als Ausgangsterm gelangt:
$(\bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (b \wedge c) = (\bar{b} \vee b) \wedge (\bar{b} \vee c) \wedge (\bar{c} \vee b) \wedge (\bar{c} \vee c) = 1 \wedge (\bar{b} \vee c) \wedge (\bar{c} \vee b) \wedge 1 = (\bar{b} \vee c) \wedge (b \vee \bar{c})$

f) $f_6(a,b,c) = (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$. Substituiert man $T = \bar{a} \vee c$, so ist:
$(T \vee b) \wedge (T \vee \bar{b}) = T \vee (b \wedge \bar{b}) = T \vee 0 = T$. Damit:
$f_6(a,b,c) = T \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) = (\bar{a} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) = \bar{a} \vee \left[c \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})\right] = \bar{a} \vee \left[(c \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge \bar{c})\right] =.$
$= \bar{a} \vee \left[(c \wedge \bar{b}) \vee 0\right] = \bar{a} \vee \left[(c \wedge \bar{b})\right] = \bar{a} \vee (\bar{b} \wedge c)$

2.54

a	b	c	s = f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Auf Grund der Wertetabelle ergibt sich die DNF:
$s = f(a,b,c) = (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$.
Vorteilhaft kann man nun zweimal den Term $(a \wedge b \wedge c)$ disjunktiv ohne Änderung des Wertes von s hinzufügen, (da $x = x \vee x \vee x$)
und $T = b \wedge c$, $S = a \wedge c$ sowie $R = a \wedge b$ "herausheben":

$s = \left[(\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)\right] \vee \left[(a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)\right] \vee \left[(a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)\right] =$
$= \left[(\bar{a} \wedge T) \vee (a \wedge T)\right] \vee \left[(S \wedge \bar{b}) \vee (S \wedge b)\right] \vee \left[(R \wedge \bar{c}) \vee (R \wedge c)\right] =$
$= \left[T \wedge (\bar{a} \vee a)\right] \vee \left[S \wedge (\bar{b} \vee b)\right] \vee \left[R \wedge (\bar{c} \vee c)\right] = \left[T \wedge 1\right] \vee \left[S \wedge 1\right] \vee \left[R \wedge 1\right] = T \vee S \vee R =$
$= (b \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge b)$

2.55

a	b	c	s = f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$s = f(a,b,c) = (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$

2.56

a	b	c	s = f(a,b,c)
0 ($\vartheta \leq 6°$)	0 ($\vartheta \geq 2°$)	0	0
0 ($\vartheta \leq 6°$)	0 ($\vartheta \geq 2°$)	1	0
0 ($\vartheta \leq 6°$)	1 ($\vartheta < 2°$)	0	0
0 ($\vartheta \leq 6°$)	1 ($\vartheta < 2°$)	1	1
1 ($\vartheta > 6°$)	0 ($\vartheta \geq 2°$)	0	1
1 ($\vartheta > 6°$)	0 ($\vartheta \geq 2°$)	1	0
1 ($\vartheta > 6°$)	1 ($\vartheta < 2°$)	0	X
1 ($\vartheta > 6°$)	1 ($\vartheta < 2°$)	1	X

X = Bedeutungslos (Eingangsbelegung nicht möglich, "don't care"). Setzt man in beiden Fällen beispielsweise X = 0, so ergibt sich:
$s = (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c})$.
Man kann jedoch auch X jeweils so setzen, dass sich die DNF möglichst stark vereinfachen lässt; d.h. man ergänzt geeignet durch Vollkonjunktionen: $s = (\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) =$

$= [(\bar{a} \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)] \vee [(a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c})] = [(b \wedge c) \wedge (a \vee \bar{a})] \vee [(a \wedge \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee b)] =$

$= [(b \wedge c) \wedge 1] \vee [(a \wedge \bar{c}) \wedge 1] = (b \wedge c) \vee (a \wedge \bar{c})$.

Dies bedeutet, dass für X in beiden Fällen 1 gesetzt wurde.

2.57 a)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	q_i
$\leftarrow x_3$	2	1	1	0	0	14	$\frac{14}{2} = 7$
x_4	1	2	0	1	0	14	$\frac{14}{1} = 1$
x_5	1	1	0	0	1	8	$\frac{8}{1} = 8$
-z	4↑	3	0	0	0	0	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	7	$7 : \frac{1}{2} = 14$
x_4	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	7	$7 : \frac{3}{2} = \frac{14}{3}$
$\leftarrow x_5$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	$1 : \frac{1}{2} = 2$
-z	0	1↑	-2		0	-28	
x_1	1	0	1	0	-1	6	
x_4	0	0	1	1	-3	4	
x_2	0	1	-1	0	2	2	
-z	0	0	-1	0	-2	-30	

$x_1 = 6$; $x_2 = 2$;
$z_{max} = 4x_1 + 3x_2 = 30$

b) Zielfunktion: $z = 2x_1 + x_2$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	q_i
x_3	1	2	1	0	0	40	$\frac{40}{1} = 40$
x_4	1	1	0	1	0	25	$\frac{25}{1} = 25$
$\leftarrow x_5$	5	2	0	0	1	110	$\frac{110}{5} = 22$
$-z$	$2\uparrow$	1	0	0	0	0	
x_3	0	$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	18	$\frac{18}{8/5} = \frac{45}{4}$
$\leftarrow x_4$	0	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	3	$\frac{3}{3/5} = 5$
x_1	1	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	22	$\frac{22}{2/5} = 55$
$-z$	0	$\frac{1}{5}\uparrow$	0	0	$-\frac{2}{5}$	-44	
x_3	0	0	1	-8/3	1/3	18	
x_2	0	1	0	5/3	-1/3	5	
x_1	1	0	0	-2/3	1/3	20	
$-z$	0	0	0	-1/3	-1/3	-45	

$x_1 = 20$; $x_2 = 5$;
$z_{max} = 2x_1 + x_2 = 45$.

c)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i
x_4	2	1	1	1		0	4	$\frac{4}{1} = 4$
$\leftarrow x_5$	1	2	2	0	1	0	6	$\frac{6}{2} = 3$
x_6	1	5	2	0		1	20	$\frac{20}{2} = 10$
$-z$	3	4	$5\uparrow$	0		0	0	
$\leftarrow x_4$	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$
x_3	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	3	$3 : \frac{1}{2} = 6$
x_6	0	3	0	0	-1	1	14	
$-z$	$\frac{1}{2}\uparrow$	-1	0	0	$-\frac{5}{2}$	0	-15	
x_1	1	0	0	2/3	-1/3	0	2/3	
x_3	0	1	1	-1/3	2/3	0	8/3	
x_6	0	3	0	0	-1	1	14	
$-z$	0	-1	0	-1/3	-7/3	0	-46/3	

$x_1 = 2/3$; $x_2 = 0$ (als Nichtbasisvariable);
$x_3 = 8/3$; $z_{max} = 46/3$

d)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i
x_4	1	4	1	1	0	0	14	$\frac{14}{1} = 14$
x_5	1	1	1	0	1	0	6	$\frac{6}{1} = 6$
$\leftarrow x_6$	3	2	0	0	0	1	9	$\frac{9}{3} = 3$
$-z$	$3\uparrow$	2	2	0	0	0	0	
x_4	0	$\frac{10}{3}$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	11	$\frac{11}{1} = 11$
$\leftarrow x_5$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{3}{1} = 3$
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	3	
$-z$	0	0	$2\uparrow$	0	0	-1	-9	
x_4	0	3	0	1	-1	0	8	
x_3	0	1/3	1	0	1	−1/3	3	
x_1	1	2/3	0	0	0	1/3	3	
$-z$	0	−2/3	0	0	-2	−1/3	-15	

$x_1 = 3$; $x_2 = 0$ (als Nichtbasisvariable);
$x_3 = 3$; $z_{max} = 15$

2.58 x_1 Stück von A, x_2 Stück von B;

$$4x_1 + 2x_2 \le 62$$
$$x_1 + x_2 \le 18$$
$$2x_1 + 6x_2 \le 72$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$
$$z = 100x_1 + 84x_2$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	q_i
$\leftarrow x_3$	4	2	1	0	0	62	$\frac{62}{4} = \frac{31}{2}$
x_4	1	1	0	1	0	18	$\frac{18}{1} = 18$
x_5	2	6	0	0	1	72	$\frac{72}{2} = 36$
-z	100↑	84	0	0	0	0	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{31}{2}$	$\frac{31}{2} : \frac{1}{2} = 31$
$\leftarrow x_4$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5$
x_5	0	5	$-\frac{1}{2}$	0	1	41	$\frac{41}{5}$
-z	0	34↑	-25	0	0	-1550	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	0	13	
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	2	0	5	
x_5	0	0	2	-10	1	16	
-z	0	0	-8	-68	0	-1720	

$x_1 = 13;$

$x_2 = 5;$

$z_{max} = 100 \cdot 13 + 84 \cdot 5 = € \, 1720$

2.59 x_1, x_2 Anzahl der Kisten von Ladung A bzw. B;

$x_1 + 0{,}75x_2 \le 60$ oder $x_1 + \frac{3}{4}x_2 \le 60$; $100x_1 + 200x_2 \le 10000$ oder $x_1 + 2x_2 \le 100$

$x_2 \le x_1$ oder $-x_1 + x_2 \le 0$; $x_1, x_2 \ge 0$; $z = 100 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 \to$ Maximum;

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	q_i
x_3	1	$\frac{3}{4}$	1	0	0	60	$150 : \frac{3}{4} = 200$
x_4	1	2	0	1	0	100	$\frac{100}{2} = 50$
$\leftarrow x_5$	-1	1	0	0	1	0	$\frac{0}{1} = 0$
-z	100	150↑	0	0	0	0	
x_3	$\frac{7}{4}$	0	1	0	$-\frac{3}{4}$	60	$60 : \frac{7}{4} = \frac{240}{7}$
$\leftarrow x_4$	3	0	0	1	-2	100	$\frac{100}{3}$
x_2	-1	1	0	0	1	0	
-z	250↑	0	0	0	-150	0	
$\leftarrow x_3$	0	0	1	$-\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} : \frac{5}{12} = 4$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{100}{3}$	
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{100}{3} : \frac{1}{3} = 100$
-z	0	0	0	$-\frac{250}{3}$	$\frac{50}{3}$↑	$-\frac{25000}{3}$	
x_5	0	0	12/5	−7/5	1	4	
x_1	1	0	8/5	−3/5	0	36	
x_2	0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	32	
-z	0	0	-40	-60	0	-8400	

$x_1 = 36;$

$x_2 = 32;$

$z_{max} = 100 \cdot 36 + 150 \cdot 32 = € \, 8400$

2.60 x_1, x_2, x_3 Anzahl von Einheiten von A_1, A_2 bzw. A_3;

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 40$; $2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 26$; $2x_2 + 2x_3 \leq 30$; $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$z = 8 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 \rightarrow$ Maximum

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i
$\leftarrow x_4$	1	2	4	1	0	0	40	$40 : 4 = 10$
x_5	2	1	2	0	1	0	26	$26 : 2 = 13$
x_6	0	2	2	0	0	1	30	$30 : 2 = 15$
-z	8	6	$10\uparrow$	0	0	0	0	
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	10	$10 : \frac{1}{4} = 40$
$\leftarrow x_5$	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	6	$6 : \frac{3}{2} = 4$
x_6	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	10	
-z	$\frac{11}{2}\uparrow$	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	-100	
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	9	$9 : \frac{1}{2} = 18$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	4	
$\leftarrow x_6$	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	12	$12 : 1 = 12$
-z	0	$1\uparrow$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{3}$	0	-122	
x_3	0	0	1	2/3	−1/3	−1/2	3	
x_1	1	0	0	−1/3	2/3	0	4	
x_2	0	1	0	-2/3	1/3	1	12	
-z	0	0	0	0	-4	-1	-134	

$x_3 = 3$;
$x_1 = 4$;
$x_2 = 12$;

$z_{max} = 8 \cdot 4 + 6 \cdot 12 + 10 \cdot 3 =$ € 134,-

(sowie weitere nichtganzahlige Lösungen wie etwa $x_1 = 5{,}5$; $x_2 = 15$; $x_3 = 0$)

2.61 **a)** $x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 - 3x_2 \leq -8$

$z = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow$ Maximum

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	6		Phase 1
$\leftarrow x_4$	2	-3	0	1	-8		
-z	5	$3\uparrow$	0	0	0		
$\leftarrow x_3$	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3} : \frac{5}{3} = 2$	Phase 2
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$		
-z	$7\uparrow$	0	0	1	-8		
x_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	2		
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	4		$x_1 = 2$; $x_2 = 4$;
-z	0	0	$-\frac{21}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-22		$z_{max} = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 22$

2.61 b) $-3x_1 - 2x_2 \le -20$; $-x_1 - x_2 \le -9$; $-x_1 - 2x_2 \le -13$

$-z = zz = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow$ Maximum

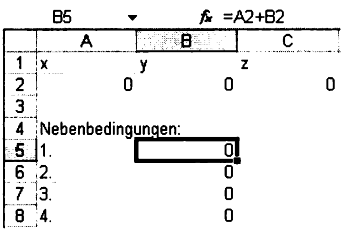
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	q_i
$\leftarrow x_3$	-3	-2	1	0	0	-20	
x_4	-1	-1	0	1	0	-9	
x_5	-1	-2	0	0	1	-13	
-zz	-2 $\uparrow$	-3	0	0	0	0	
x_1	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{20}{3}$	
x_4	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{7}{3}$	
$\leftarrow x_5$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{19}{3}$	
-zz	0	$-\frac{5}{3}\uparrow$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{40}{3}$	
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	
$\leftarrow x_4$	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{19}{4}$	
-zz	1	0	$-\frac{1}{4}\uparrow$	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{85}{4}$	
x_1	1	0	0	-2	1	5	
x_3	0	0	1	-4	1	3	
x_2	0	1	0	1	-1	4	
-zz	0	0	0	-1	-1	22	

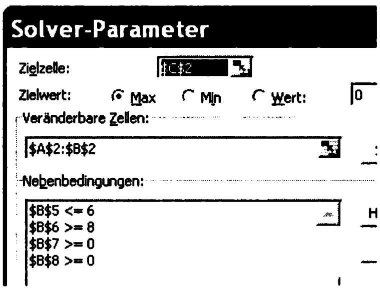
Phase 1

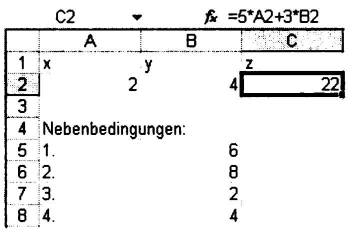
Phase 1 beendet; Phase 2 nicht mehr nötig, da Tableau bereits optimal!

$x_1 = 5$; $x_2 = 4$;

$z_{min} = 2\cdot 5 + 3\cdot 4 = 22$







2.61 **c)** $-x_1 - x_2 - 2x_3 \le -20$; $x_1 + x_2 \le 50$; $-x_1 - 3x_3 \le -30$; $-z = zz = -x_1 + 3x_2 - x_3 - 200 \rightarrow$ Maximum;
$-zz - x_1 + 3x_2 - x_3 = 200$ als Gleichung der Schlusszeile („z-Zeile") des 1. Tableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_4	-1	-1	-2	1	0	0	-20		Phase 1
x_5	1	1	0	0	1	0	50		
$\leftarrow x_6$	-1	0	-3	0	0	1	-30		
-zz	-1↑	3	-1	0	0	0	200		
x_4	0	-1	1	1	0	-1	10		
$\leftarrow x_5$	0	1	-3	0	1	1	20	20 : 1 = 20	
x_1	1	0	3		0	-1	30		
-zz	0	3↑	2	0	0	-1	230		Phase 2
x_4	0	0	-2	1	1	0	30		
x_2	0	1	-3	0	1	1	20		
$\leftarrow x_1$	1	0	3	0	0	-1	30	30 : 3 = 10	
-zz	0	0	11↑	0	-3	-4	170		
x_4	$\frac{2}{3}$	0	0	1	1	$-\frac{2}{3}$	50		
x_2	1	1	0	0	1	0	50		
x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	10		$x_1 = 0$; $x_2 = 50$; $x_3 = 10$
-zz	$-\frac{11}{3}$	0	0	0	-3	$-\frac{1}{3}$	60		$z_{min} = 1\cdot 0 - 3\cdot 50 + 1\cdot 10 + 200 = 60$

2.62 x_1 Betrag für G-Aktien, x_2 Betrag für M-Aktien;
Betrag für die H-Aktien: $4500 - x_1 - x_2 \ge 0$ oder $x_1 + x_2 \le 4500$
$x_1 \le x_2 + 500$ oder $x_1 - x_2 \le 500$
$x_1 + x_2 \ge 2500$; $-x_1 - x_2 \le -2500$
$x_2 + (4500 - x_1 - x_2) \le 3500$ oder $x_1 \ge 1000$; $-x_1 \le -1000$
$z = 0{,}04\cdot x_1 + 0{,}07\cdot x_2 + 0{,}10\cdot(4500 - x_1 - x_2) = -0{,}06\cdot x_1 - 0{,}03\cdot x_2 + 450 \rightarrow$ Maximum

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	4500		Phase 1
x_4	1	-1	0	1	0	0	500		
$\leftarrow x_5$	-1	-1	0	0	1	0	-2500		
x_6	-1	0	0	0	0	1	-1000		
-z	-0,06↑	-0,03	0	0	0	0	-450		
x_3	0	0	1	0	1	0	2000		
$\leftarrow x_4$	0	-2	0	1	1	0	-2000		
x_1	1	1	0	0	-1	0	2500		
x_6	0	1	0	0	-1	1	1500		
-z	0	0,03↑	0	0	-0,06	0	-300		
x_3	0	0	1	0	1	0	2000		Phase 2
x_2	0	1	0	-0,5	-0,5	0	1000		
x_1	1	0	0	0,5	-0,5	0	1500	1500 : 0,5	
$\leftarrow x_6$	0	0	0	0,5	-0,5	1	500	500 : 0,5	
-z	0	0	0	0,015↑	-0,045	0	-330		
x_3	0	0	1	0	1	0	2000		
x_2	0	1	0	0	-1	1	1500		
x_1	1	0	0	0	0	-1	1000		
x_4	0	0	0	1	-1	2	1000		
-z	0	0	0	0	-0,03	-0,03	-345		

$x_1 =$ € 1000,- ; $x_2 =$ € 1500,- ; damit € 2000,- in H-Aktien;
$z_{max} = -0{,}06\cdot x_1 - 0{,}03\cdot x_2 + 450 =$ € 345,-
Man könnte auch x_3 als betrag für die H Aktien einführen. In diesem Fall lautet eine Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 = 4500$, womit sie aber Gleichungsform hat. Dies umgeht man mit dem vorgeschlagenen Weg.

2.63 x_1, x_2, x_3 Stückzahl von B_1, B_2 bzw. B_3;

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1000$; $3x_1 + x_3 \le 1000$; $2x_2 + 3x_3 \le 1000$; $x_1 \le 100$; $x_3 \ge 300$ oder $-x_3 \le -300$;

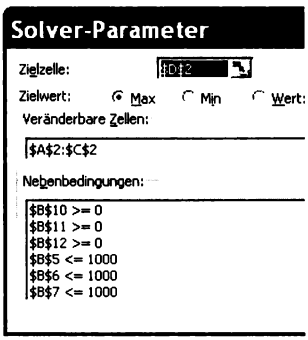
$z = 12x_1 + 9x_2 + 10x_3 \to$ Maximum

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i	q_i	
x_4	2	1	2	1	0	0	0	0	1000		Phase 1
x_5	3	0	1	0	1	0	0	0	1000		
x_6	0	2	3	0	0	1	0	0	1000		
x_7	1	0	0	0	0	0	1	0	100		
$\leftarrow x_8$	0	0	-1	0	0	0	0	1	-300		
-z	12	9	10↑	0	0	0	0	0	0		
x_4	2	1	0	1	0	0	0	2	400	400:2 = 200	Phase 2
x_5	3	0	0	0	1	0	0	1	700	700:3 = 233,3	
x_6	0	2	0	0	0	1	0	3	100		
$\leftarrow x_7$	1	0	0	0	0	0	1	0	100	100:1 = 100	
x_3	0	0	1	0	0	0	0	-1	300		
-z	12↑	9	0	0	0	0	0	10	-3000		
x_4	0	1	0	1	0	0	-2	2	200	200:2 = 100	
x_5	0	0	0	0	1	0	-3	1	400	400: 1 = 400	
$\leftarrow x_6$	0	2	0	0	0	1	0	3	100	100:3 = 33,33	
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	100		
x_3	0	0	1	0	0	0	0	-1	300		
-z	0	9	0	0	0	0	-12	10↑	-4200		
x_4	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	-2	0	$\frac{400}{3}$		
x_5	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	-3	0	$\frac{1100}{3}$		
$\leftarrow x_8$	0	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{100}{3}$	$\frac{100}{3} : \frac{2}{3} = 50$	
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	100		
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1000}{3}$	$\frac{1000}{3} : \frac{2}{3} = 500$	
-z	0	$\frac{7}{3}$↑	0	0	0	$-\frac{10}{3}$	-12	0	$-\frac{13600}{3}$		
x_4	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$ 0	100		
x_5	0	0	0	0	1	0	-3	1	400		
x_2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	50		
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	100		
x_3	0	0	1	0	0	0	0	-1	300		
-z	0	0	0	0	0	$-\frac{9}{2}$	-12	$-\frac{7}{2}$	-4650		

$x_1 = 100$, $x_2 = 50$, $x_3 = 300$; $z_{max} = 12 \cdot 100 + 9 \cdot 50 + 10 \cdot 300 =$ € 4650,-

D2 fx =12*A2+9*B2+10*C2

	A	B	C	D
1	x1	x2	x3	z
2	0	0	0	0
3				
4	Nebenbedingungen:			
5	1.	0		
6	2.	0		
7	3.	0		
8	4.	0		
9	5.	0		
10	6.	0		
11	7.	0		
12	8.	0		



B5 fx =2*A2+B2+2*C2

	A	B	C	D
1	x1	x2	x3	z
2	100	50	300	4650
3				
4	Nebenbedingungen:			
5	1.	850		
6	2.	600		
7	3.	1000		
8	4.	100		
9	5.	300		
10	6.	100		
11	7.	50		
12	8.	300		

2.64 x_1, x_2, x_3 Massen der Walnusskerne, Erdnusskerne bzw. Rosinen *im Studentenfutter*;

$x_1 \leq 100$

$x_2 \leq 100$

$x_3 \leq 100$

$\frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \leq x_1$ oder $-3x_1 + x_2 + x_3 \leq 0$

$\frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \geq x_3$ oder $-x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 0$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Dieses Problem liegt damit in der Standardform vor.

$z = 5 \cdot (100 - x_1) + 3 \cdot (100 - x_2) + 2 \cdot (100 - x_3) + 4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 1000 \rightarrow$ Maximum;

$-z - x_1 + x_2 + 2x_3 = -1000$ als Gleichung für die Schlusszeile („z-Zeile“) des 1. Tableaus.

Phase 2

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i	q_i
x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	100	
x_5	0	1	0	0	1	0	0	0	100	
x_6	0	0	1	0	0	1	0	0	100	100:1 = 100
$\leftarrow x_7$	-3	1	1	0	0	0	1	0	0	0:1 = 0
x_8	-1	-1	3	0	0	0	0	1	0	0:3 = 0
-z	-1	1	2↑	0	0	0	0	0	-1000	
x_4	1	0	0	1	0	0	0	0	100	100:1=100
x_5	0	1	0	0	1	0	0	0	100	
x_6	3	-1	0	0	0	1	-1	0	100	100:3=33,33
x_3	-3	1	1	0	0	0	1	0	0	
$\leftarrow x_8$	8	-4	0	0	0	0	-3	1	0	0:8 = 0
-z	5↑	-1	0	0	0	0	-2	0	-1000	
x_4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	100	100: $\frac{1}{2}$=200
$\leftarrow x_5$	0	1	0	0	1	0	0	0	100	100:1 = 100
x_6	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	100	100: $\frac{1}{2}$=200
x_3	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	
-z	0	$\frac{3}{2}$↑	0	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	-1000	
x_4	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	50	
x_2	0	1	0	0	1	0	0	0	100	
x_6	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	50	
x_3	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	50	
x_1	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	50	
-z	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	-1150	

$x_1 = 50$ kg, $x_2 = 100$ kg, $x_3 = 50$ kg sollten als Studentenfutter gemischt verkauft werden, der Rest einzeln; $z_{max} = -50 + 100 + 2 \cdot 50 + 1000 =$ € 1150,-

2.65 $x_1, x_2, 100 - x_1 - x_2$ Kistenanzahl der Äpfel, Zwetschken bzw. Pfirsiche.

$x_1 \geq 30$ oder $-x_1 \leq -30$

$x_2 \geq 20$ oder $-x_2 \leq -20$

$100 - x_1 - x_2 \geq 10$ oder $x_1 + x_2 \leq 90$

$x_2 \geq 100 - x_1 - x_2$, damit $x_1 + 2x_2 \geq 100$ oder schließlich $-x_1 - 2x_2 \leq -100$

$x_1, x_2 \geq 0$; $z = -2x_1 - x_2 + 600 \rightarrow$ Maximum;

$-z - 2x_1 - x_2 = -600$ als Gleichung für die Schlusszeile („z-Zeile“) des 1. Tableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i
x_3	-1	0	1	0	0	0	-30	
x_4	0	-1	0	1	0	0	-20	
x_5	1	1	0	0	1	0	90	
$\leftarrow x_6$	-1	-2	0	0	0	1	-100	
-z	-2	-1↑	0	0	0	0	-600	
$\leftarrow x_3$	-1	0	1	0	0	0	-30	
x_4	0,5	0	0	1	0	-0,5	30	
x_5	0,5	0	0	0	1	0,5	40	
x_2	0,5	1	0	0	0	-0,5	50	
-z	-1,5↑	0	0	0	0	-0,5	-550	
x_1	1	0	-1	0	0	0	30	
x_4	0	0	0,5	1	0	-05	15	
x_5	0	0	0,5	0	1	0,5	25	
x_2	0	1	0,5	0	0	-0,5	35	
-z	0	0	-1,5	0	0	-0,5	-505	

Phase 1

Phase 2 nicht mehr nötig, Tableau bereits optimal

$x_1 = 30$; $x_2 = 35$; $100 - 30 - 35 = 35$ Kisten Pfirsiche; $z_{max} = -2 \cdot 30 - 35 + 600 =$ € 505,-

2.66 x_1, x_2 Anzahl der großen bzw. kleinen Aufgaben, die vom Studenten beantwortet werden; $x_1 \leq 8$; $x_2 \leq 40$; $10x_1 + 2x_2 \leq 120$ oder $5x_1 + x_2 \leq 60$; $x_1 \geq 3$ oder $-x_1 \leq -3$; $x_2 \geq 12$ oder $-x_2 \leq -12$; $x_1, x_2 \geq 0$; $z = 12x_1 + 3x_2 \rightarrow$ Maximum;

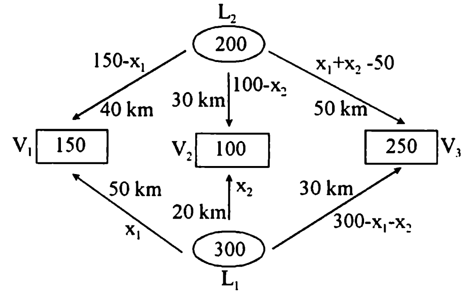
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b_i	q_i
x_3	1	0	1	0	0	0	0	8	
x_4	0	1	0	1	0	0	0	40	
x_5	5	1	0	0	1	0	0	60	
x_6	-1	0	0	0	0	1	0	-3	
$\leftarrow x_7$	0	-1	0	0	0	0	1	-12	
-z	12	3↑	0	0	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	0	0	0	8	
x_4	0	0	0	1	0	0	0	28	
x_5	5	0	0	0	1	0	1	48	
$\leftarrow x_6$	-1	0	0	0	0	1	0	-3	
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	12	
-z	12↑	0	0	0	0	0	3	-36	
$\leftarrow x_3$	0	0	1	0	0	1	0	5	5:1 = 5
x_4	0	0	0	1	0	0	1	28	
x_5	0	0	0	0	1	5	1	33	33:5 = 6,6
x_1	1	0	0	0	0	-1	0	3	
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	12	
-z	0	0	0	0	0	12↑	3	-72	
x_6	0	0	1	0	0	1	0	5	
x_4	0	0	0	1	0	0	1	28	28:1 = 28
$\leftarrow x_5$	0	0	-5	0	1	0	1	8	8:1 = 8
x_1	1	0	1	0	0	0	0	8	
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	12	
-z	0	0	-12	0	0	0	3↑	-132	
x_6	0	0	1	0	0	1	0	5	5:1 = 5
$\leftarrow x_4$	0	0	5	1	-1	0	0	20	20:5 = 4
x_7	0	0	-5	0	1	0	1	8	
x_1	1	0	1	0	0	0	0	8	8 : 1 = 8
x_2	0	1	-5	0	1	0	0	20	
-z	0	0	3↑	0	-3	0	0	-156	
x_6	0	0	0	-0,2	0,2	1	0	1	
x_3	0	0	1	0,2	-0,2	0	0	4	
x_7	0	0	0	1	0	0	1	28	
x_1	1	0	0	-0,2	0,2	0	0	4	
x_2	0	1	0	1	0	0	0	40	
-z	0	0	0	-0,6	-2,4	0	0	-168	

Phase 1

Phase 2

$x_1 = 4$ große Aufgaben, $x_2 = 40$ kleine Aufgaben, $z_{max} = 12 \cdot 4 + 3 \cdot 40 = 168$ Punkte

2.67 a)



x_1, x_2 Liefermengen in hl von L_1 an V_1 bzw. an V_2, alle Liefermengen nicht negativ:

$300 - x_1 - x_2 \geq 0$ oder $x_1 + x_2 \leq 300$
$150 - x_1 \geq 0$ oder $x_1 \leq 150$
$100 - x_2 \geq 0$ oder $x_2 \leq 100$
$x_1 + x_2 - 50 \geq 0$ oder $-x_1 - x_2 \leq -50$;
$x_1, x_2 \geq 0$

z (in €) $= 50 \cdot x_1 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot x_2 \cdot 0{,}1 + 30 \cdot (300 - x_1 - x_2) \cdot 0{,}1 + \ldots = 3x_1 + x_2 + 1550 \rightarrow$ Minimum;
$-z = zz = -3x_1 - x_2 - 1550$, $-zz - 3x_1 - x_2 = 1550$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	300		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	150		
x_5	0	1	0	0	1	0	100		
$\leftarrow x_6$	-1	-1	0	0	0	1	-50		
-zz	-3↑	-1	0	0	0	0	1550		
x_3	0	0	1	0	0	1	250		Phase 2
x_4	0	-1	0	1	0	1	100		
x_5	0	1	0	0	1	0	100	100:1 = 100	
$\leftarrow x_1$	1	1	0	0	0	-1	50	50:1 = 50	
-zz	0	2↑	0	0	0	-3	1700		
x_3	0	0	1	0	0	1	250		
x_4	1	0	0	1	0	0	150		
x_5	-1	0	0	0	1	1	50		
x_2	1	1	0	0	0	-1	50		
-zz	-2	0	0	0	0	-1	1600		

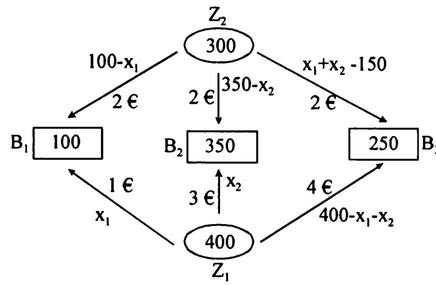
$x_1 = 0$ hl (als Nichtbasisvariable), $x_2 = 50$ hl; $z_{min} = 3 \cdot 0 + 50 + 1550 =$ € 1600,-
Ergebnis gut einsehbar.

b) Gegenüber a) *nur Änderung der Zielfunktion*, im Anfangstableau nur Änderung der Schlusszeile:
z (in €) $= 50 \cdot x_1 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot x_2 \cdot 0{,}1 + \mathbf{0} \cdot (300 - x_1 - x_2) \cdot 0{,}1 + 40 \cdot (150 - x1) \cdot 0{,}1 +$
$+ 30 \cdot (100 - x_2) \cdot 0{,}1 + \mathbf{0} \cdot (x_1 + x_2 - 50) \cdot 0{,}1 = x_1 - x_2 + 900 \rightarrow$ Minimum;
$-z = zz = -x_1 + x_2 - 900$ oder $-zz\ -x_1 + x_2 = 900$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	300		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	150		
x_5	0	1	0	0	1	0	100		
$\leftarrow x_6$	-1	-1	0	0	0	1	-50		
-zz	-1↑	1	0	0	0	0	900		
x_3	0	0	1	0	0	1	250		Phase 2
x_4	0	-1	0	1	0	1	100		
x_5	0	1	0	0	1	0	100	100:1 = 100	
$\leftarrow x_1$	1	1	0	0	0	-1	50	50:1 = 50	
-zz	0	2↑	0	0	0	-1	950		
x_3	0	0	1	0	0	1	250		
x_4	1	0	0	1	0	0	150		
x_5	-1	0	0	0	1	1	50		
x_2	1	1	0	0	0	-1	50		
-zz	-2	0	0	0	0	1	850		

$x_1 = 0$ hl als Nichtbasisvariable, $x_2 = 50$ hl; $z_{min} = 0 - 50 + 900 =$ € 850,- Ergebnis gut einsehbar.

2.68 a)



x_1, x_2 Liefermengen in Paletten von Z_1 an B_1 bzw. an B_2, alle Liefermengen nicht negativ:

$400 - x_1 - x_2 \geq 0$ oder $x_1 + x_2 \leq 400$

$100 - x_1 \geq 0$ oder $x_1 \leq 100$

$350 - x_2 \geq 0$ oder $x_2 \leq 350$

$x_1 + x_2 - 150 \geq 0$ oder $-x_1 - x_2 \leq -150$

$x_1, x_2 \geq 0$

$z\,(\text{in } €) = 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot(400 - x_1 - x_2) + \ldots =$

$= -3x_1 - x_2 + 2200 \rightarrow$ Minimum;

$-z = zz = 3x_1 + x_2 - 2200$, $-zz + 3x_1 + x_2 = 2200$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	400		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	100		
x_5	0	1	0	0	1	0	350		
$\leftarrow x_6$	-1	-1	0	0	0	1	-150		
-zz	3↑	1	0	0	0	0	2200		
x_3	0	0	1	0	0	1	250		
$\leftarrow x_4$	0	-1	0	1	0	0	-50		
x_5	0	1	0	0	1	0	350		
x_1	1	1	0	0	0	-1	150		
-zz	0	-2↑	0	0	0	3	1750		
$\leftarrow x_3$	0	0	1	0	0	1	250	250:1 = 250	Phase 2
x_2	0	1	0	-1	0	-1	50		
x_5	0	0	0	1	1	1	300	300:1 = 300	
x_1	1	0	0	1	0	0	100		
-zz	0	0	0	-2	0	1↑	1850		
x_6	0	0	1	0	0	1	250		
x_2	0	1	1	-1	0	0	300		
x_5	0	0	-1	1	1	0	50		
x_1	1	0	0	1	0	0	100		
-zz	0	0	-1	-2	0	0	1600		

$x_1 = 100$ Paletten, $x_2 = 300$ Paletten; $z_{min} = -3\cdot 100 - 300 + 2200 = €\ 1600,-$

b) Gegenüber a) *nur Änderung der Zielfunktion*, im Anfangstableau nur Änderung der Schlusszeile:

$z\,(\text{in } €) = 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot(100 - x_1) + 2\cdot(350 - x_2) + \mathbf{0}\cdot(400 - x_1 - x_2) + \mathbf{0}\cdot(x_1 + x_2 - 150) =$

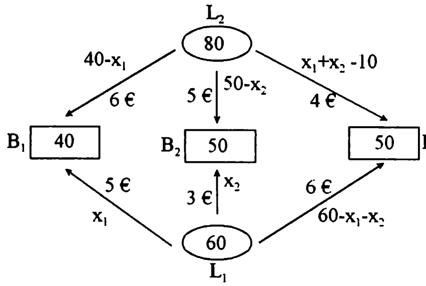
$= -x_1 + x_2 + 900 \rightarrow$ Minimum;

$-z = zz = x_1 - x_2 - 900$ oder $-zz + x_1 - x_2 = 900$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	400		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	100		
x_5	0	1	0	0	1	0	350		
$\leftarrow x_6$	-1	-1	0	0	0	1	-150		
-zz	1↑	-1	0	0	0	0	900		
x_3	0	0	1	0	0	1	250		
$\leftarrow x_4$	0	-1	0	1	0	0	-50		
x_5	0	1	0	0	1	0	350		
x_1	1	1	0	0	0	-1	150		
-zz	0	-2↑	0	0	0	1	750		
x_3	0	0	1	0	0	1	250		Phase 2 nicht mehr nötig, Tableau bereits optimal
x_2	0	1	0	-1	0	-1	50		
x_5	0	0	0	1	1	1	300		
x_1	1	0	0	1	0	0	100		
-zz	0	0	0	-2	0	-1	850		

$x_1 = 100$ Paletten, $x_2 = 50$ Paletten; $z_{min} = -100 + 50 + 900 = €\ 850,-$

2.69 a)



x_1, x_2 Liefermengen in Fuhren von L_1 an B_1 bzw. an B_2, alle Liefermengen nicht negativ:

$60 - x_1 - x_2 \geq 0$ oder $x_1 + x_2 \leq 60$

$40 - x_1 \geq 0$ oder $x_1 \leq 40$

$50 - x_2 \geq 0$ oder $x_2 \leq 50$

$x_1 + x_2 - 10 \geq 0$ oder $-x_1 - x_2 \leq -10$

$x_1, x_2 \geq 0$

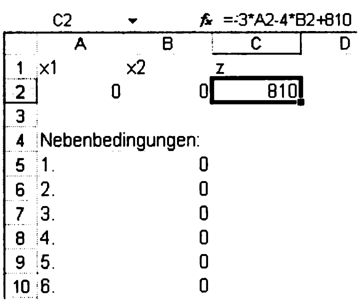
z (in €) $= 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot (60 - x_1 - x_2) + \ldots =$

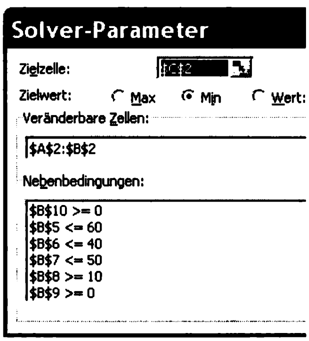
$= -3x_1 - 4x_2 + 810 \rightarrow$ Minimum;

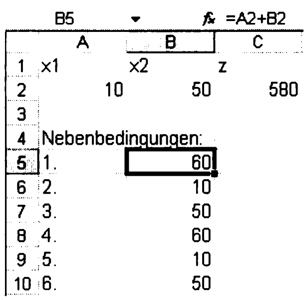
$-z = zz = 3x_1 + 4x_2 - 810$, $-zz + 3x_1 + 4x_2 = 810$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	60		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	40		
x_5	0	1	0	0	1	0	50		
$\leftarrow x_6$	-1	-1	0	0	0	1	-10		
-zz	3↑	4	0	0	0	0	810		
x_3	0	0	1	0	0	1	50	50:1 = 50	Phase 2
$\leftarrow x_4$	0	-1	0	1	0	1	30	30:1 = 30	
x_5	0	1	0	0	1	0	50		
x_1	1	1	0	0	0	-1	10		
-zz	0	1	0	0	0	3↑	780		
$\leftarrow x_3$	0	1	1	-1	0	0	20	20:1 = 20	
x_6	0	-1	0	1	0	1	30		
x_5	0	1	0	0	1	0	50	50:1 = 50	
x_1	1	0	0	1	0	0	40		
-zz	0	4↑	0	-3	0	0	690		
x_2	0	1	1	-1	0	0	20		
x_6	0	0	1	0	0	1	50		
$\leftarrow x_5$	0	0	-1	1	1	0	30	30:1 = 30	
x_1	1	0	0	1	0	0	40	40:1 = 40	
-zz	0	0	-4	1↑	0	0	610		
x_2	0	1	0	0	1	0	50		
x_6	0	0	1	0	0	1	50		
x_4	0	0	-1	1	1	0	30		
x_1	1	0	1	0	-1	0	10		
-zz	0	0	-3	0	-1	0	580		

$x_1 = 10$ Fuhren, $x_2 = 50$ Fuhren; $z_{min} = -3 \cdot 10 - 4 \cdot 50 + 810 =$ € 580,-







b) Gegenüber a) *nur Änderung der Zielfunktion*, im Anfangstableau nur Änderung der Schlusszeile:

z (in €) $= 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot (60 - x_1 - x_2) + 6 \cdot (40 - x_1) + 5 \cdot (50 - x_2) + \mathbf{0} \cdot (x_1 + x_2 - 10) =$

$= -x_1 - 2x_2 + 490 \rightarrow$ Minimum;

$-z = zz = x_1 + 2x_2 - 490$ oder $-zz + x_1 + 2x_2 = 490$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	60		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	40		
x_5	0	1	0	0	1	0	50		
←x_6	-1	-1	0	0	0	1	-10		
-zz	1↑	2	0	0	0	0	490		
x_3	0	0	1	0	0	1	50	50:1 = 50	Phase 2
←x_4	0	-1	0	1	0	1	30	30:1 = 30	
x_5	0	1	0	0	1	0	50		
x_1	1	1	0	0	0	-1	10		
-zz	0	1	0	0	0	1↑	480		
←x_3	0	1	1	-1	0	0	20	20:1 = 20	
x_6	0	-1	0	1	0	1	30		
x_5	0	1	0	0	1	0	50	50:1 = 50	
x_1	1	0	0	1	0	0	40		
-zz	0	2↑	0	-1	0	0	450		
x_2	0	1	1	-1	0	0	20		
x_6	0	0	1	0	0	1	50		
←x_5	0	0	-1	1	1	0	30	30:1 = 30	
x_1	1	0	0	1	0	0	40	40:1 = 40	
-zz	0	0	-2	1↑	0	0	410		
x_2	0	1	0	0	1	0	50		
x_6	0	0	1	0	0	1	50		
x_4	0	0	-1	1	1	0	30	30:1 = 30	
x_1	1	0	1	0	-1	0	10	40:1 = 40	
-zz	0	0	-1	0	-1	0	380		

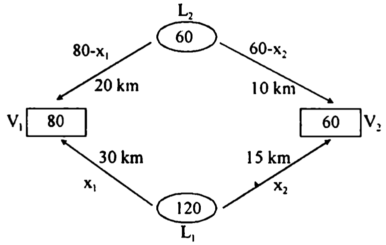
$x_1 = 10$ Fuhren, $x_2 = 50$ Fuhren; $z_{min} = -10 - 2 \cdot 50 + 490 =$ € 380,-

c) Gegenüber a) *nur Änderung der Zielfunktion*, im Anfangstableau nur Änderung der Schlusszeile:
z (in €) $= 5 \cdot x_1 + \mathbf{0} \cdot x_2 + 6 \cdot (60 - x_1 - x_2) + 6 \cdot (40 - x_1) + \mathbf{0} \cdot (50 - x_2) + 4 \cdot (x_1 + x_2 - 10) =$
$= -3x_1 - 2x_2 + 560 \to$ Minimum;
$-z = zz = 3x_1 + 2x_2 - 560$ oder $-zz + 3x_1 + 2x_2 = 560$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	60		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	40		
x_5	0	1	0	0	1	0	50		
←x_6	-1	-1	0	0	0	1	-10		
-zz	3↑	2	0	0	0	0	560		
x_3	0	0	1	0	0	1	50	50:1 = 50	Phase 2
←x_4	0	-1	0	1	0	1	30	30:1 = 30	
x_5	0	1	0	0	1	0	50		
x_1	1	1	0	0	0	-1	10		
-zz	0	-1	0	0	0	3↑	530		
←x_3	0	1	1	-1	0	0	20	20:1 = 20	
x_6	0	-1	0	1	0	1	30		
x_5	0	1	0	0	1	0	50	50:1 = 50	
x_1	1	0	0	1	0	0	40		
-zz	0	2↑	0	-3	0	0	440		
x_2	0	1	1	-1	0	0	20		
x_6	0	0	1	0	0	1	50		
x_5	0	0	-1	1	1	0	30		
x_1	1	0	0	1	0	0	40		
-zz	0	0	-2	-1	0	0	400		

$x_1 = 40$ Fuhren, $x_2 = 20$ Fuhren (ohne reale Bedeutung, da an die fiktive Baustelle B_2);
Liefermenge von L_1 an B_3: $60 - x_1 - x_2 = 0$ Fuhren;
Liefermenge von L_2 an B_3: $x_1 + x_2 - 10 = 50$ Fuhren;
$z_{min} = -3 \cdot 40 - 2 \cdot 20 + 560 =$ € 400,-

2.70 a)



x_1, x_2 Liefermengen in Tonnen von L_1 an V_1 bzw. an V_2, alle Liefermengen nicht negativ. Zusätzlich ist anzugeben, dass $x_1 + x_2 \leq 120$ sein muss (nicht mehr von L_1 möglich) und dass $80\text{-}x_1 + 60\text{-}x_2 \leq 60$ sein muss (nicht mehr von L_2 möglich).

Diese Überlegung würde man sich ersparen, wenn man einen dritten fiktiven Verbraucher V_3 (Transportkosten gleich 0) einführt, der die Lagerüberkapazität von 40 t gegenüber dem Bedarf von V_1 und V_2 aufnimmt. So oder so, man kommt wieder auf die gewohnten Nebenbedingungen, die man wie bei den vorigen Aufgaben reihen kann:

$x_1 + x_2 \leq 120$; $80 - x_1 \geq 0$ oder $x_1 \leq 80$; $60 - x_2 \geq 0$ oder $x_2 \leq 60$;
$80\text{-}x_1 + 60\text{-}x_2 \leq 60$ oder $-x1 - x_2 \leq -80$; $x_1, x_2 \geq 0$
$z \text{ (in €)} = 30 \cdot x_1 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot x_2 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot (80 - x_1) \cdot 0{,}1 + 10 \cdot (60 - x_2) \cdot 0{,}1 = x_1 + 0{,}5\, x_2 + 220 \rightarrow$ Minimum;
$-z = zz = -x_1 - 0{,}5 \cdot x_2 - 220$, $-zz - x_1 - 0{,}5 x_2 = 220$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

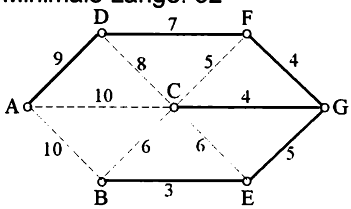
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	120		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	80		
x_5	0	1	0	0	1	0	60		
$\leftarrow x_6$	-1	-1	0	0	0	1	-80		
-zz	1↑	-0,5	0	0	0	0	220		
x_3	0	0	1	0	0	1	40		Phase 2
x_4	0	-1	0	1	0	1	0		
$\leftarrow x_5$	0	1	0	0	1	0	60	60:1 = 60	
x_1	1	1	0	0	0	-1	80	80:1 = 80	
-zz	0	0,5	0	0	0	-1	300		
x_3	0	0	1	0	1	1	40		
x_4	0	0	0	1	1	1	60		
x_2	0	1	0	0	0	0	60		$x_1 = 20$ t, $x_2 = 60$ t;
x_1	1	0	0	0	-1	-	20		$z_{min} = 20 + 0{,}5\ 60 + 220$
-zz	0	0	0	0	-0,5	-1	270		= € 270,-

b) $x_1 + x_2 \leq 120$; $90 - x_1 \geq 0$ oder $x_1 \leq 90$; $90 - x_2 \geq 0$ oder $x_2 \leq 90$;
$90\text{-}x_1 + 90\text{-}x_2 \leq 60$ oder $-x1 - x_2 \leq -120$; $x_1, x_2 \geq 0$
$z \text{ (in €)} = 30 \cdot x_1 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot x_2 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot (90 - x_1) \cdot 0{,}1 + 10 \cdot (90 - x_2) \cdot 0{,}1 = x_1 + 0{,}5\, x_2 + 270 \rightarrow$ Minim.
$-z = zz = -x_1 - 0{,}5 \cdot x_2 - 270$, $-zz - x_1 - 0{,}5 x_2 = 270$ für die Schlusszeile des Anfangstableaus.

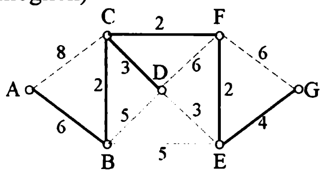
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	q_i	
x_3	1	1	1	0	0	0	120		Phase 1
x_4	1	0	0	1	0	0	90		
x_5	0	1	0	0	1	0	90		
$\leftarrow x_6$	-1	-1	0	0	0	1	-120		
-zz	-1↑	-0,5	0	0	0	0	270		
x_3	0	0	1	0	0	1	0		
$\leftarrow x_4$	0	-1	0	1	0	1	-30		
x_5	0	1	0	0	1	0	90		
x_1	1	1	0	0	0	-1	120		
-zz	0	0,5↑	0	0	0	-1	390		
x_3	0	0	1	0	0	1	0		Phase 2
x_2	0	1	0	-1	0	-1	30		
$\leftarrow x_5$	0	1	0	1	1	1	60	60:1 = 60	
x_1	1	0	0	1	0	0	90	90:1 = 90	
-zz	0	0	0	0,5↑	0	-0,5	375		
x_3	0	0	1	0	0	1	0		
x_2	0	1	0	0	1	0	90		
x_4	0	0	0	1	1	1	60		$x_1 = 30$ t, $x_2 = 90$ t;
x_1	1	0	0	0	-1	-1	30		$z_{min} = 30 + 0{,}5\ 90 + 270$
-zz	0	0	0	0	-0,5	-1	345		= € 345,-

2.71 **a)** Kein Baum, da der Graph einen Zyklus (geschlossenen Weg enthält)
b) Baum **c)** Kein Baum, da der Graph nicht zusammenhängend ist

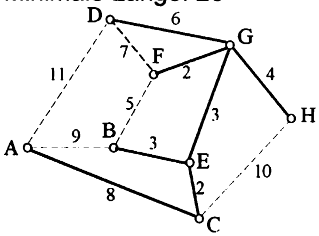
2.72 **a)** Minimale Länge: 32



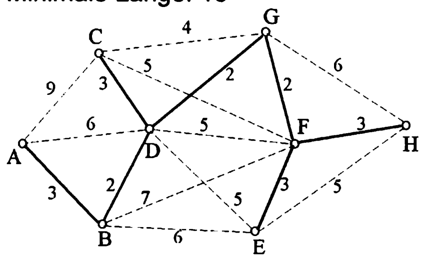
b) Minimale Länge: 19 (Statt CD auch DE möglich)



c) Minimale Länge: 28

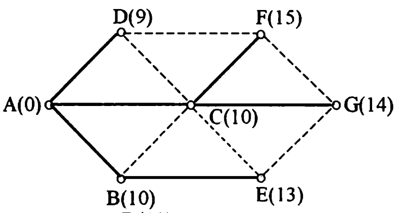


d) Minimale Länge: 18

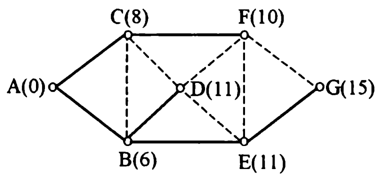


2.73 Zusätzlich zu den Entfernungsangaben ist auch ein möglicher Entfernungsbaum gezeichnet

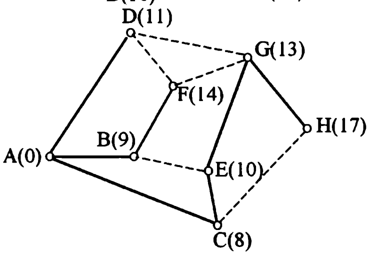
a)



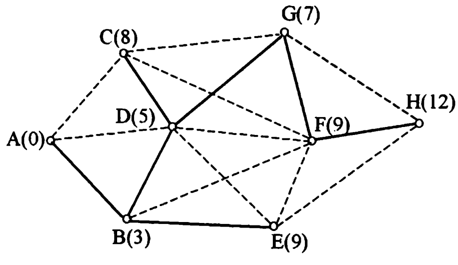
b)



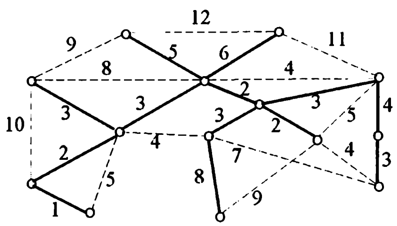
c)



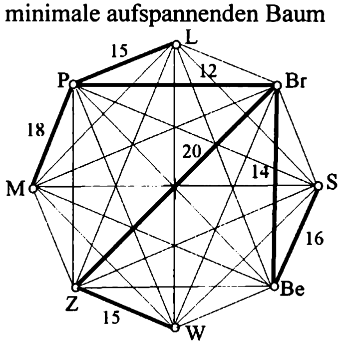
d)



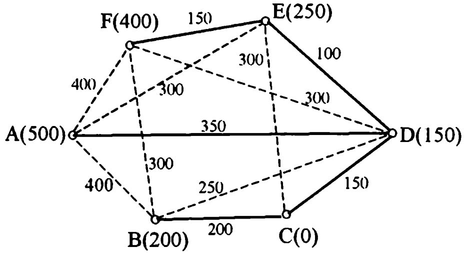
2.74 Minimale Länge: 45



2.75 Das Netz mit den geringsten Mietkosten ist der minimale aufspannenden Baum

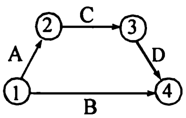


2.76

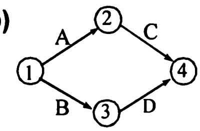


Der Entfernungsbaum bezüglich C gibt die günstigsten Flugpreise an:

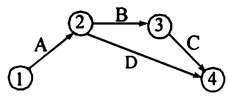
2.77 **a)**



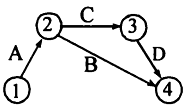
b)



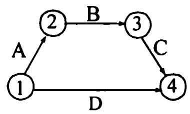
c)



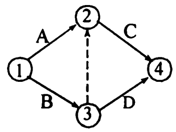
d)



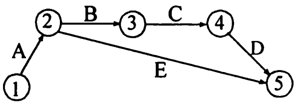
e)



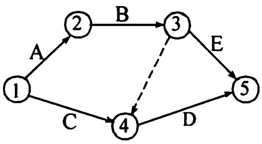
f)



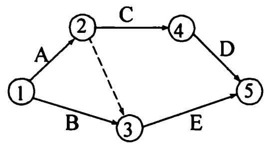
2.78 **a)**



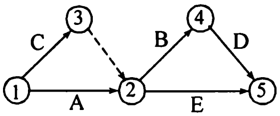
b)



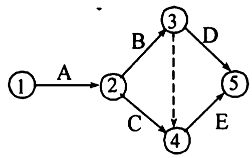
c)



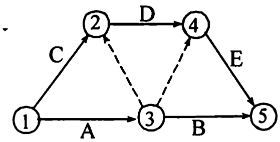
d)



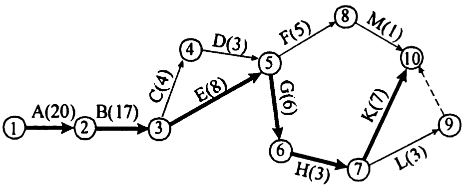
e)



f)



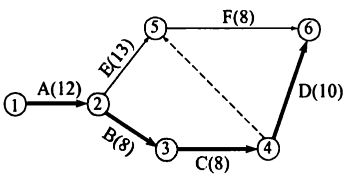
2.79



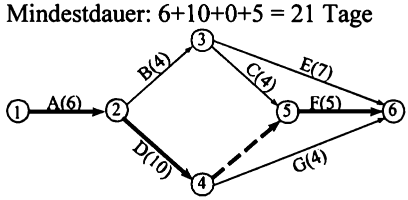
Kritischer Weg markiert. Mindestdauer: 20+17+8+6+3+7 = 61 Tage.

2.80 Kritischer Weg markiert.

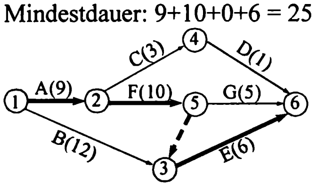
a) Mindestdauer: 12+8+8+10 = 38 Tage



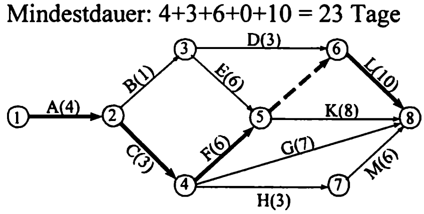
b) Mindestdauer: 6+10+0+5 = 21 Tage



c) Mindestdauer: 9+10+0+6 = 25 Tage



d) Mindestdauer: 4+3+6+0+10 = 23 Tage



3 Unendliche Reihen

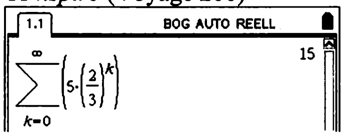
3.1 Alle Reihen sind konvergente geometrische Reihen, da $|q| < 1$:

a) $a = 1,\ q = \frac{1}{4}$; Summe $s = \frac{a}{1-q} = \frac{4}{3}$ **b)** $a = 1,\ q = \frac{1}{9}$; Summe $s = \frac{9}{8}$

c) $a = 2,\ q = \frac{1}{3}$; Summe $s = 3$ **d)** $a = 3,\ q = \frac{1}{10}$; Summe $s = \frac{10}{3} = 3,\dot{3}$

e) $a = 5,\ q = \frac{2}{3}$; Summe $s = 15$ Mathcad: $\sum_{k=0}^{\infty}\left[5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\right] \to 15$

TI-*nspire* (Voyage 200)



3.2 **a)** $\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$ | mit (2n-1)·(2n+1) multiplizieren

$1 = A\cdot(2n + 1) + B\cdot(2n - 1)$

$1 = 2A\cdot n + A + 2B\cdot n - B$; Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$ I: $0 = 2A + 2B$

$\underline{\text{II: } 1 = A - B}$

$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{2\cdot(2n-1)} - \frac{1}{2\cdot(2n+1)}$; $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + - \ldots = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{(3m-2)\cdot(3m+1)} = \frac{A}{3m-2} + \frac{B}{3m+1}$ | mit $(3m - 2)\cdot(3m + 1)$ multiplizieren

$1 = A\cdot(3m + 1) + B\cdot(3m - 2)$

$1 = 3A\cdot m + A + 3B\cdot m - 2B$; Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$ I: $0 = 3A + 3B$

$\underline{\text{II: } 1 = A - 2B}$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems: $A = \frac{1}{3}$; $B = -\frac{1}{3}$;

$\frac{1}{(3m-2)\cdot(3m+1)} = \frac{1}{3\cdot(3m-2)} - \frac{1}{3\cdot(3m+1)}$; $s = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{30} + - \ldots = \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{n\cdot(n+4)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+4}$; mit $n\cdot(n + 4)$ multiplizieren $\Rightarrow 1 = A\cdot(n + 4) + B\cdot n$;

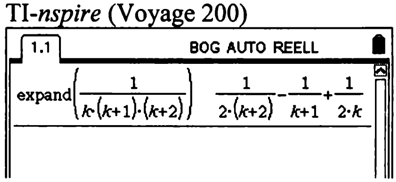
statt eines Koeffizientenvergleichs ist es oft vorteilhaft, in der oben stehenden Gleichung für n die Nullstellen der Nenner einzusetzen: $n = 0 \Rightarrow 1 = A\cdot(0 + 4) = 4A$ oder $A = \frac{1}{4}$;

$n = -4 \Rightarrow 1 = A\cdot(-4 + 4) + B\cdot(-4)$ oder $B = -\frac{1}{4}$; $\frac{1}{n\cdot(n+4)} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right)$;

$s = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \ldots\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}$, denn alle anderen Summanden als 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ heben sich weg. Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+4)} \to \frac{25}{48}$

d) $\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}$; mit $k\cdot(k+1)\cdot(k+2)$ multiplizieren und danach k gleich 0, -1 sowie -2 setzen $\Rightarrow \frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2\cdot(k+2)}$.

TI-*nspire* (Voyage 200)



$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \underline{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + - \ldots = \underline{\frac{1}{4}}$,

es bleibt nur der Bruch $\frac{1}{4}$ übrig, alle anderen Brüche heben sich weg

3.3 $s_1 = \ln 2$; $s_2 = s_1 + \ln\frac{3}{2} = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3$, $s_3 = s_2 + \ln\frac{4}{3} = \ln 3 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 4$, usw.
$s_n = \ln(n+1)$, ... die Teilsummenfolge ist keine Nullfolge, daher ist die Reihe divergent

3.4 **a)** $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, keine Nullfolge, Reihe ist divergent

b) $c_n = \frac{1}{2n+1}$, Nullfolge; Konvergenz ist möglich, tatsächlich ist die Reihe jedoch divergent. Dies könnte man ähnlich zeigen wie bei der harmonischen Reihe (Beispiel 3.1 b), Lehrbuch Seite 83)

c) $c_n = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+1/n} \to \frac{1}{2}$, d.h. keine Nullfolge, also ist die Reihe divergent

3.5 **a)** $c_n = \frac{n}{3^n}$, $c_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n+1}{3n} = \frac{n}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} \to \frac{1}{3}$; konvergent Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \to \frac{3}{4}$

b) $c_n = \frac{3^n}{n^2}$, $c_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}$;

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{3 \cdot n^2}{(n+1)^2} = \frac{3n^2}{n^2+2n+1} = \frac{3n^2 : n^2}{(n^2+2n+1):n^2} = \frac{3}{1+2/n+1/n^2} \to \frac{3}{1+0+0} = 3; \text{ divergent}$$

c) $c_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{n^2:n^2}{(n^2+2n+1):n^2} = \frac{1}{1+2/n+1/n^2} \to \frac{1}{1+0+0} = 1.$
Keine Aussage möglich; die Reihe ist tatsächlich konvergent. Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \frac{\pi^2}{6}$

d) $c_n = \frac{0{,}5^n}{n^2} = \frac{1}{2^n \cdot n^2}$; $c_n = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)^2}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n^2}{2 \cdot (n+1)^2} = \frac{n^2:n^2}{2 \cdot (n+1)^2 : n^2} =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2/n+1/n^2} \to \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$; konvergent. Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^2} \to \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}$

e) $c_n = \frac{3^n}{(n+1)!}$, $c_n = \frac{3^{n+1}}{(n+2)(n+1)!}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{3}{n+2} \to 0$; konvergent. Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} \to \frac{e^3}{3} - \frac{4}{3}$

f) $c_n = n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{n}{3^n}$, $c_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} \to \frac{1}{3}$, konv. Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \to \frac{3}{4}$

g) $c_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$, $c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{3n}{2(n+1)} \to \frac{3}{2}$, divergent

h) $c_n = \frac{2n+1}{4^n}$, $c_{n+1} = \frac{2n+3}{4^{n+1}}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{2n+3}{4 \cdot (2n+1)} \to \frac{1}{4}$; konvergent. Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot n+1}{4^n}\right) \to \frac{11}{9}$

i) $c_n = \frac{3n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $c_{n+1} = \frac{3(n+1)}{2n+3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{2n \cdot (2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{4n^2+6n} = \frac{(2n^2+3n+1):n^2}{(4n^2+6n):n^2} =$
$= \frac{2+3/n+1/n}{4+6/n} \to \frac{2+0+0}{4+0} = \frac{1}{2}$; konvergent. Summe $\approx 1{,}1303$

j) $c_n = \frac{n^2}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{n^2}{(n+1) \cdot 5^n}$, $c_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+2) \cdot 5^{n+1}}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(n+1)^3}{5n^2 \cdot (n+2)} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{5 \cdot (n^3+2n^2)} =$
$= \frac{1+3/n+3/n^2+1/n^3}{5 \cdot (1+2/n)} \to \frac{1+0+0+0}{5 \cdot (1+0)} = \frac{1}{5}$; konvergent. *Derive:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = 5 \cdot \ln\frac{5}{4} - \frac{15}{16}$

k) $c_n = \frac{100^n}{n!}$, $c_n = \frac{100^{n+1}}{(n+1) \cdot n!}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{100}{n+1} \to 0$; Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!} \to e^{100} - 1 = 2.688 \times 10^{43}$
konvergent

3.5 **l)** $c_n = \frac{(\ln 3)^n}{n!}$, $c_{n+1} = \frac{(\ln 3)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!}$; $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\ln 3}{n+1} \to 0$, konvergent Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(3))^n}{n!} \to 2$

3.6 **a)** $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 +- \ldots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots$; $c_n = \frac{1}{2n-1}$ positiv für alle n; $c_{n+1} \le c_n$; $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$; daher Konvergenz Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}\right] \to \frac{\pi}{4}$

b) $c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - + \ldots = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + - \ldots$; Mathcad: $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right] \to e^{-1}$

$c_n = \frac{1}{n!}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, $c_{n+1} \le c_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, daher Konvergenz

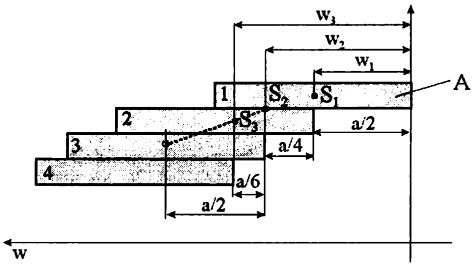
c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; $c_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; $c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - + \ldots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \ldots$;
$c_{n+1} \le c_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, daher Konvergenz.

Anmerkung: Geometrische Reihe mit a = 1 und $q = -\frac{1}{3}$, Summe $s = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-(-1/3)} = \frac{3}{4}$

d) $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 +- \ldots = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + - \ldots$; $c_n = \frac{1}{n^2}$, Mathcad: $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}\right] \to \frac{\pi^2}{12}$

$c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$; $c_{n+1} \le c_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, daher Konvergenz

3.7 Die Abbildung zeigt die Entstehung des Ziegelstapels: S_1 ist der Schwerpunkt des ersten Ziegels; S_1 muss gerade noch durch den zweiten Ziegel unterstützt sein. S_2 ist der Schwerpunkt der *beiden* obersten Ziegel; auch dieser muss noch gerade vom dritten Ziegel unterstützt sein. S_3 ist der Schwerpunkt der ersten drei Ziegel, usw. Jeder Ziegel hat die Länge a und den Inhalt A der Seitenfläche.



Allgemeine Schwerpunktsformel: $x_S = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i}$ („Ingenieur-Mathematik 3", Seite 253).

w_n bezeichnet die x - Koordinate des Schwerpunktes S_n des Stapels der obersten n Ziegeln und gleichzeitig seinen Überhang über dem (n+1) - ten Ziegel.

$w_1 = \frac{a}{2}$; $w_2 = \frac{a \cdot A + w_1 \cdot A}{A + A} = \frac{a}{2} + \frac{a}{4}$; $w_3 = \frac{(w_2 + a/2)\cdot A + w_2 \cdot 2A}{A + 2A} = \frac{w_2 \cdot 3A + a/2 \cdot A}{3A} = w_2 + \frac{a}{6}$;

$w_4 = \frac{(w_3 + a/2)\cdot A + w_3 \cdot 3A}{A + 3A} = \frac{w_3 \cdot 4A + a/2 \cdot A}{4A} = w_3 + \frac{a}{8}$ usw. $w_n = w_{n-1} + \frac{a}{2n}$

Der Überhang w_n der obersten n Ziegeln beträgt also im labilen Gleichgewicht:

$$w_n = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{6} + \ldots + \frac{a}{2(n-1)} = \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right).$$

Da die Teilsummen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}$ über alle Schranken wachsen (*harmonische Reihe*, Lehrbuch Beispiel 3.1, Seite 83), kann auch der Überhang theoretisch beliebig groß werden.
Anmerkung: Hoffentlich setzt sich nicht eine Fliege außen auf den obersten Ziegel.

3.8 **a)** $a_n = 10^n$; $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{10^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$

b) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$; $|a_n| = \frac{1}{n}$; $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

3.8 **c)** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n \cdot 10^{n-1}}$; $|a_n| = \dfrac{1}{n \cdot 10^{n-1}}$;

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^n}{n\cdot 10^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} 10\cdot\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(10+\frac{10}{n}\right) = 10$$

d) $a_n = n^2$; $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2/n+1/n^2} = \frac{1}{1+0+0} = 1$

e) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$; $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n+1/n^2}{1} = \frac{1+0+0}{1} = 1$

f) $1 + 2^1 \cdot x^2 + 2^2 \cdot x^4 + \ldots = 1 + 2^1 \cdot z^1 + 2^2 \cdot z^2 + \ldots$ mit $z = x^2$;

Potenzreihe in z: $a_n = 2^n$; $r_z = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; d.h. Konvergenz für $|z| < 1/2$ oder $x^2 < 1/2$. Daher ist der Konvergenzradius der Potenzreihe in x gleich $r = 1/\sqrt{2}$

3.9 Die Potenzreihenentwicklung erfolgt bis zur dritten Potenz in x:

a) $f(x) = \tan x$; $f(0) = 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$; $f'(0) = 1$;

$f''(x) = (1+\tan^2 x)' = 2\cdot\tan x\cdot(1+\tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x$; $f''(0) = 0$;

$f'''(x) = 2\cdot(1+\tan^2 x) + 2\cdot 3\tan^2 x\cdot(1+\tan^2 x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$; $f'''(0) = 2$;

$f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}\cdot x + \dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \ldots =$

$\tan x = 0 + \dfrac{1}{1}\cdot x + \dfrac{0}{2}\cdot x^2 + \dfrac{2}{6}\cdot x^3 + \ldots = x + \dfrac{x^3}{3} + \ldots$.

Mathcad:

$\tan(x)$ Reihen,7 $\rightarrow x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2\cdot x^5}{15} + \dfrac{17\cdot x^7}{315}$

$f(x) = \tan x$ ist eine ungerade Funktion; daher treten nur ungerade Potenzen von x auf.

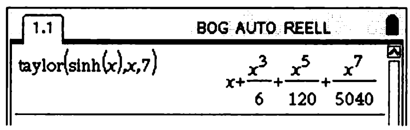
b) $f(x) = \sinh x$; $f(0) = 0$; $f'(x) = \cosh x$; $f'(0) = 1$;

$f''(x) = \sinh x$; $f''(0) = 0$; $f'''(x) = \cosh x$; $f'''(0) = 1$;

$\sinh x = 0 + \dfrac{1}{1}\cdot x + \dfrac{0}{2}\cdot x^2 + \dfrac{1}{6}\cdot x^3 + \ldots = x + \dfrac{x^3}{6} + \ldots$

$f(x) = \sinh x$ ist eine ungerade Funktion; daher treten nur ungerade Potenzen von x auf.

TI–*nspire*



c) $f(x) = \cosh x$; $f(0) = 1$; $f'(x) = \sin h(x)$, $f'(0) = 0$; $f''(x) = \cosh x$; $f''(0) = 1$; $f'''(x) = \sinh x$;

$f'''(0) = 0$; $\cosh x = 1 + \dfrac{0}{1}\cdot x + \dfrac{1}{2}\cdot x^2 + \dfrac{0}{6}\cdot x^3 + \ldots = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \ldots$.

$f(x) = \cosh x$ ist eine gerade Funktion; daher treten nur gerade Potenzen von x auf.

d) $f(x) = \arctan x$; $f(0) = 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $f'(0) = 1$; $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; $f''(0) = 0$;

$f'''(x) = \dfrac{2\cdot(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$; $f'''(0) = -2$; $\arctan x = 0 + \dfrac{1}{1}\cdot x + \dfrac{0}{2}\cdot x^2 + \dfrac{-2}{6}\cdot x^3 + \ldots = x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots$.

$f(x) = \arctan x$ ist eine ungerade Funktion; daher treten nur ungerade Potenzen von x auf.

e) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$; $f(0) = 1$; $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}$; $f'(0) = \dfrac{1}{2}$; $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}}$;

$f''(0) = -\dfrac{1}{4}$; $f'''(x) = \dfrac{3}{8}\cdot(1+x)^{-\frac{5}{2}}$; $f'''(0) = \dfrac{3}{8}$;

$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1/2}{1}\cdot x + \dfrac{-1/4}{2}\cdot x^2 + \dfrac{3/8}{6}\cdot x^3 + \ldots = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - + \ldots$

3.9 **f)** $f(x)=\sqrt{2+x}=(2+x)^{\frac{1}{2}}$; $f(0)=\sqrt{2}$; $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}}$; $f'(0)=\frac{\sqrt{2}}{4}$; $f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot(2+x)^{-\frac{3}{2}}$;

$f''(0)=-\frac{\sqrt{2}}{16}$; $f'''(x)=\frac{3}{8}\cdot(2+x)^{-\frac{5}{2}}$; $f'''(0)=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{64}$;

$$\sqrt{1+x}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}/4}{1}\cdot x+\frac{-\sqrt{2}/16}{2}\cdot x^2+\frac{3\cdot\sqrt{2}/64}{6}\cdot x^3+\ldots=\sqrt{2}\cdot\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{128}-+\ldots\right)$$

g) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$; $f(0)=1$; $f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}}$; $f'(0)=-\frac{1}{2}$;

$f''(x)=\frac{3}{4}\cdot(1+x)^{-\frac{5}{2}}$; $f''(0)=\frac{3}{4}$; $f'''(x)=-\frac{15}{8}\cdot(1+x)^{-\frac{7}{2}}$; $f'''(0)=-\frac{15}{8}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1/2}{1}\cdot x+\frac{-3/4}{2}\cdot x^2-\frac{15/8}{6}\cdot x^3+\ldots=1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5x^3}{16}+-\ldots$$

h) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x}}=(2+x)^{-\frac{1}{2}}$; $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot(2+x)^{-\frac{3}{2}}$; $f'(0)=-\frac{\sqrt{2}}{8}$;

$f''(x)=\frac{3}{4}\cdot(2+x)^{-\frac{5}{2}}$; $f''(0)=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{32}$; $f'''(x)=-\frac{15}{8}\cdot(2+x)^{-\frac{7}{2}}$; $f'''(0)=-\frac{15\cdot\sqrt{2}}{128}$

$$\frac{1}{\sqrt{2+x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}/8}{1}\cdot x+\frac{-3\cdot\sqrt{2}/32}{2}\cdot x^2-\frac{15\cdot\sqrt{2}/128}{6}\cdot x^3+\ldots=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{4}+\frac{3x^2}{32}-\frac{5x^3}{128}+-\ldots\right)$$

3.10 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$; $f(0)=0$; $f'(x)=\frac{1}{(1+x)/(1-x)}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x^2}$; $f'(0)=2$;

$f''(x)=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$; $f''(0)=0$; $f'''(x)=\frac{4\cdot(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$; $f'''(0)=4$;

$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=0+\frac{2}{1!}\cdot x+\frac{0}{2!}\cdot x^2+\frac{4}{3!}\cdot x^3+\ldots=2x+\frac{2}{3}\cdot x^3+\ldots$; $\quad\frac{1+x}{1-x}=2\Rightarrow x=\frac{1}{3}$;

$\ln 2=f\left(\frac{1}{3}\right)\approx 2\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{56}{81}=0{,}6914$. Genauer Wert auf 4 Nachkommastellen: $\ln 2=0{,}6931$.

Mathcad: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ Reihen,7 $\rightarrow 2\cdot x+\frac{2\cdot x^3}{3}+\frac{2\cdot x^5}{5}+\frac{2\cdot x^7}{7}$

$x:=\frac{1}{3}\qquad 2\cdot x+\frac{2\cdot x^3}{3}+\frac{2\cdot x^5}{5}+\frac{2\cdot x^7}{7}=0.6931$

TI-*nspire* (Voyage 200)

1.1 BOG AUTO REELL

$\text{taylor}\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),x,7\right)\qquad 2\cdot x+\frac{2\cdot x^3}{3}+\frac{2\cdot x^5}{5}+\frac{2\cdot x^7}{7}$

$2\cdot x+\frac{2\cdot x^3}{3}+\frac{2\cdot x^5}{5}+\frac{2\cdot x^7}{7}|x=\frac{1}{3}\qquad 0.6931$

3.11 **a)** $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots$;

$e^{-x}=1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{6}+\frac{(-x)^4}{24}+\ldots=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-+\ldots$;

$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+-\ldots$; $\sin 3x=3x-\frac{(3x)^3}{6}+-\ldots=3x-\frac{9}{2}\cdot x^3+-\ldots$;

$$e^{-x}\cdot\sin 3x=\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-+\ldots\right)\cdot\left(3x-\frac{9x^3}{2}+-\ldots\right)=3x-3x^2-3x^3+4x^4+-\ \ldots$$

Mathcad: $e^{-x}\cdot\sin(3x)$ Reihen,4 $\rightarrow 3\cdot x-3\cdot x^2-3\cdot x^3+4\cdot x^4$

3.11 **b)** $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + - \ldots$; gerade Funktion

c) $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - + \ldots$; ungerade F.

d) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$; $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \ldots = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \ldots$;

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots$ geometrische Reihe mit $q = x^2$

$\left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \ldots\right)\cdot\left(1 - x^2 + x^4 - \ldots\right) = 1 - 3x^2 + \frac{11}{3}x^4 - \ldots$

3.12 **a)** $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$; $f(0) = 1$; $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1+x}}$; $f'(0) = \frac{1}{2}$; $\sqrt{1+x} \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1}\cdot x = 1 + \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$; $f(0) = 1$; $f'(x) = \frac{1}{3}\cdot(1+x)^{-\frac{2}{3}}$; $f'(0) = \frac{1}{3}$; $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$; $f(0) = 1$; $f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}}$; $f'(0) = -\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}}$; $f(0) = 1$; $f'(x) = -\frac{1}{3}\cdot(1+x)^{-\frac{4}{3}}$; $f'(0) = -\frac{1}{3}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{3}$

e) $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + - \ldots$; $\sin 2t \approx 2t$; $t\cdot\sin 2t = t\cdot(2t - \ldots) \approx 2t^2$.

Oder: $f(t) = t\cdot\sin 2t$; $f(0) = 0$; $f'(t) = \sin 2t + 2t\cdot\cos 2t$; $f(0) = 0$;

$f''(t) = 4\cos 2t - 4t\cdot\sin 2t$; $f''(0) = 4$; $t\cdot\sin 2t \approx 0 + \frac{0}{1!}\cdot t + \frac{4}{2!}\cdot t^2 = 2t^2$

f) $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + - \ldots$; $\sin\frac{t}{3} \approx \frac{t}{3}$; $\sin^2\frac{t}{3} \approx \left(\frac{t}{3}\right)^2 = \frac{t^2}{9}$

g) $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots$; $e^{-t} \approx 1 + (-t) = 1 - t$; $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - + \ldots$

$\cos 2t = 1 - \frac{(2t)^2}{2} + \frac{(2t)^4}{24} - + \ldots$; $\cos 2t \approx 1$; $e^{-t}\cdot\cos 2t \approx (1-t)\cdot 1 = 1 - t$

h) $(1+2x)^{-1/2} = 1 - x + \ldots$; $e^{-x/2}\cdot(1+2x)^{-1/2} = \left(1 - \frac{x}{2} + \ldots\right)\cdot(1 - x + \ldots) \approx 1 - \frac{3x}{2}$

3.13 $p(h) = 1013\cdot e^{-\frac{h}{7991}}$; $p(0) = 1013$; $p'(h) = 1013\cdot\left(-\frac{1}{7991}\right)\cdot e^{-\frac{h}{7991}}$; $p'(0) = -\frac{1013}{7991}$.

Lineare Näherung: $p(h) \approx p(0) + \frac{p'(0)}{1!} = 1013 - \frac{1013}{7991}\cdot h = 1013\cdot\left(1 - \frac{h}{7991}\right)$.

Absolute Abweichung: $1013\cdot e^{-\frac{h}{7991}} - 1013\cdot\left(1 - \frac{h}{7991}\right)$; relative Abweichung (bezogen auf den

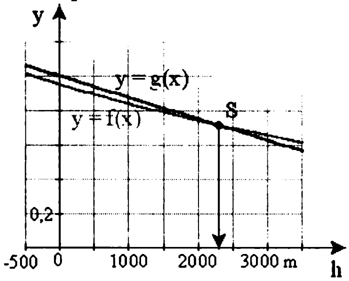
genauen Wert p(h)): $\frac{1}{1013\cdot e^{-\frac{h}{7991}}}\left[1013\cdot e^{-\frac{h}{7991}} - 1013\cdot\left(1 - \frac{h}{7991}\right)\right] = 0{,}05 \Rightarrow$

$0{,}95\cdot e^{-\frac{h}{7991}} - 1 + \frac{h}{7991} = 0$ oder $\underbrace{0{,}95\cdot e^{-\frac{h}{7991}}}_{f(x)} = \underbrace{1 - \frac{h}{7991}}_{g(x)} = 0$; der Graph von f(x) ist eine

Exponentialfunktion, jener von g(x) eine Gerade.

Fortsetzung: Nächste Seite!

3.13 Forts. Man liest als h–Koordinate des Schnittpunktes ab: $h \approx 2300$ m.



TI–*nspire*

BOG AUTO REELL

$$\text{nSolve}\left(0.95\cdot e^{\frac{-h}{7991}}=1-\frac{h}{7991},h,2000,2500\right)$$

2293.8028

Somit: $h = 2293{,}8\text{ m} \approx 2300$ m.

Kontrolle: $p(2293{,}8) = 1013\cdot e^{-h/7991} = 760{,}2$ mbar;

Näherung: $p(h) \approx 1013\cdot\left(1-\frac{2293{,}8}{7991}\right) = 722{,}2$ mbar.

$$\frac{760{,}2-722{,}2}{760{,}2} = 0{,}050 = 5{,}0\%$$

3.14 $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots \approx 1+x$ mit $x = -\frac{t}{T} \Rightarrow p = 1-e^{-\frac{t}{T}} \approx 1-\left[1+\left(-\frac{t}{T}\right)\right] = \frac{t}{T}$.

Lösungsvariante: $p(t) = 1-e^{-\frac{t}{T}}$; $p(0) = 1-1 = 0$; $p'(t) = e^{-\frac{t}{T}}\cdot\frac{1}{T}$; $p'(0) = \frac{1}{T}$;

$p(t) \approx p(0)+\frac{p'(0)}{1!}\cdot t = 0+\frac{1/T}{1}\cdot t = \frac{t}{T}$.

3.15 $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L\cdot(C+x)}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x/C}}$; $\frac{1}{\sqrt{1+x/C}} \approx \left(1-\frac{x}{2C}\right)$ unter Verwendung der Näherungsformel

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$ (Aufgabe 3.12 a));

damit: $\omega_r \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\left(1-\frac{x}{2C}\right) = \frac{1}{\sqrt{0{,}2\cdot 50\cdot 10^{-6}}}\cdot\left(1-\frac{x}{2\cdot 50\cdot 10^{-6}}\right) = 316{,}2\cdot\left(1-10^4\cdot x\right)$.

Genaue Formel: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{0{,}2\cdot(50\cdot 10^{-6}+2\cdot 10^{-6})}} = 310{,}1\ s^{-1}$;

Näherungsformel: $\omega_r \approx 316{,}2\cdot\left(1-10^4\cdot 2\cdot 10^{-6}\right) = 309{,}9\ s^{-1}$

3.16 $s = h-\sqrt{h^2-a^2} = h\cdot\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{h^2}}\right)$; $\sqrt{1-\frac{a^2}{h^2}} \approx 1-\frac{a^2}{2h^2}$ unter Verwendung der Näherungsformel

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}$ (Aufgabe 3.12 a)); $s \approx h\cdot\left[1-\left(1-\frac{a^2}{2h^2}\right)\right] = \frac{a^2}{2h^2}$

3.17 Unter Verwendung der Näherungsformel $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1+\frac{x}{2}$ (Aufgabe 3.12 c), wobei x durch –x ersetzt ist) erhält man: $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-x^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right) \approx m_0c^2\cdot\left(1+\frac{x^2}{2}-1\right) = \frac{m_0v^2}{2}$

3.18 $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-+\ldots$

$$A = \frac{1}{2}r^2\cdot(\alpha-\sin\alpha) = \frac{1}{2}r^2\cdot\left[\alpha-\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}+\frac{\alpha^5}{120}-\ldots\right)\right] \approx \frac{1}{2}r^2\cdot\left(\frac{\alpha^3}{6}-\frac{\alpha^5}{120}\right) = \frac{1}{12}r^2\alpha^3\cdot\left(1-\frac{\alpha^2}{20}\right)$$

3.19 $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}=(\cos x)^{-1}$; $f(0)=1$; $f'(x)=(-1)\cdot(\cos x)^{-2}\cdot(-\sin x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; $f'(0)=0$;

$$f''(x)=\frac{\cos x\cdot\cos^2 x-2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^4 x}=\frac{\cos^2 x-2\cdot(-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^3 x}=\frac{\cos^2 x+2\cdot\sin^2 x}{\cos^3 x}=\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x};$$

$f''(0)=1$; $\dfrac{1}{\cos x}=1+\dfrac{0}{1!}\cdot x+\dfrac{1}{2!}\cdot x^2+\ldots\approx 1+\dfrac{x^2}{2}$; $\overline{FM}=\dfrac{r}{2\cos\alpha}=\dfrac{r}{2}\cdot\left(1+\dfrac{\alpha^2}{2}+\ldots\right)\approx\dfrac{r}{2}$

3.20 Näherungsformel (Aufgabe 3.12 a)): $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}$; $c\approx 331{,}5\,\dfrac{m}{s}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\vartheta}{273{,}15°C}\right)$

$\vartheta=30°C$: $c=331{,}5\cdot\sqrt{1+\dfrac{30}{273{,}15}}=349{,}23$ m/s; Näherung: $c\approx 331{,}5\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{30}{273{,}15}\right)=349{,}70$ m/s

3.21 $\cosh x\approx 1+\dfrac{x^2}{2}$ (siehe Aufgabe 3.9 c)); damit:

$$f(x)=a\cdot\cosh\frac{x}{a}+b\approx a\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a^2}\right)+b=a+\frac{x^2}{2a}+b;$$

I: $f(0)=a+b=h-d=6{,}5$
<u>II: $f(25)=a+25^2/2a+b=h=8$;</u>
einfaches nichtlineares Gleichungssystem; I $\Rightarrow$ $b=6{,}5-a$, in II einsetzen (oder gleich $a+b=6{,}5$ in II einsetzen) ergibt $25^2/2a=1{,}5$ oder $a=208{,}3$ m; weiters $b=6{,}5-a=-201{,}8$ m

3.22 $u_C(t)=5\cdot\left[t-0{,}5\cdot\left(1-e^{-2t}\right)\right]$; $u_C(0)=0$; $u_C'(t)=5-5\cdot e^{-2t}$; $u_C'(0)=0$; $u_C''(t)=10\cdot e^{-2t}$;
$u_C''(0)=10$; $u_C(t)\approx 0+\dfrac{0}{1!}\cdot t+\dfrac{10}{2!}\cdot t^2=5\cdot t^2$.

Lösungsvariante: Unter Verwendung von $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ ergibt sich mit $x=-2t$:

$$u_C(t)=5\cdot\left[t-0{,}5\cdot\left(1-e^{-2t}\right)\right]\approx 5\cdot\left[t-0{,}5\cdot\left(1-\left(1-2t+\frac{4t^2}{2}\right)\right)\right]=5\cdot t^2$$

3.23 $i(t)=t+0{,}1\cdot(e^{-10t}-1)$; unter Verwendung von $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ ergibt sich mit $x=-10\cdot t$:
$e^{-10t}\approx 1-10t+50t^2$; damit: $i(t)\approx t+0{,}1\cdot(1-10t+50t^2-1)=5\cdot t^2$

3.24 Es werden die Potenzreihenentwicklungen aus dem Lehrbuch, Seite 95, verwendet.

a) $\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{\left(1+x+x^2/2+\ldots\right)-1}{x}=1+\dfrac{1}{2}\cdot x+\ldots\to 1$ für $x\to 0$

b) $\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\dfrac{\left(1-x^2/2+x^4/24-\ldots\right)-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{24}x^2-\ldots\to-\dfrac{1}{2}$ für $x\to 0$

c) $\dfrac{\cos x-1}{x}=\dfrac{\left(1-x^2/2+x^4/24-\ldots\right)-1}{x}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{24}x^3-\ldots\to 0$ für $x\to 0$

d) $\dfrac{x\cdot e^{-x}}{1-e^{2x}}=\dfrac{x\cdot\left(1-x+x^2/2-\ldots\right)}{1-(1+2x+4x^2/2+\ldots)}=\dfrac{1-x+x^2/2+\ldots}{-2-2x+\ldots}\to-\dfrac{1}{2}$ für $x\to 0$

3.25 Es werden die Potenzreihenentwicklungen aus dem Lehrbuch, Seite 95, verwendet.

a) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^x\frac{t-t^3/6+t^5/120-\ldots}{t}\,dt=x-x^3/18+x^5/600-\ldots$

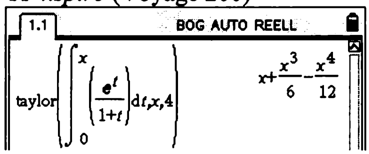
3.25 **b)** $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$ ergibt mit $x = t^3$: $\sqrt{1+t^3} = \left(1 + t^3/2 - t^6/8 + \ldots\right)$;

$$\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt = \int_0^x \left(1 + t^3/2 - t^6/8 + \ldots\right)dt = x + x^4/8 - x^7/56 + \ldots$$

c) $\int_0^x \frac{e^t}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(1 + t + t^2/2 + t^3/6 + \ldots\right)\cdot\left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots\right)dt =$

$$= \int_0^x \left(1 + t^2/2 - t^3/3 + \ldots\right)dt = x + x^3/6 - x^4/12 + \ldots$$

TI–*nspire* (Voyage 200)



d) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$ ergibt mit $x = \sqrt{t}$: $\cos\sqrt{t} = 1 - t/2 - t^2/24 + \ldots$

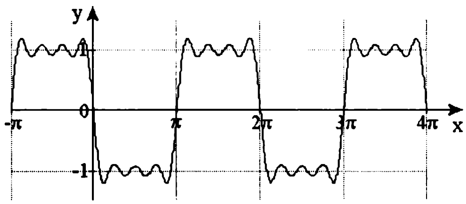
$$\int_0^x \cos\sqrt{t}\,dt = \int_0^x \left(1 - t/2 - t^2/24 + \ldots\right)dt = x - x^2/4 + x^3/72 - \ldots$$

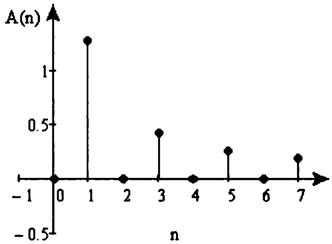
3.26 **a)** Ungerade 2π-periodische Funktion; $a_n = 0$; $b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(-1)\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\left[\cos(n\pi) - 1\right]$;

$b_1 = \frac{2}{1\cdot\pi}\cdot\left[\cos(1\cdot\pi) - 1\right] = \frac{2}{1\cdot\pi}\cdot\left[-1-1\right] = -\frac{4}{\pi}$; $b_2 = \frac{2}{2\cdot\pi}\cdot\left[\cos(2\pi) - 1\right] = \frac{2}{1\cdot\pi}\cdot\left[1-1\right] = 0$;

allgemein: $b_n = -\frac{2}{n\cdot\pi}$ für n ungerade, $b_n = 0$ für n gerade. $A_n = |b_n|$. Somit:

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\cdot\sin x - \frac{4}{3\pi}\cdot\sin 3x - \frac{4}{5\pi}\cdot\sin 5x - \frac{4}{7\pi}\cdot\sin 7x - \ldots = -\frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}\ldots\right)$$



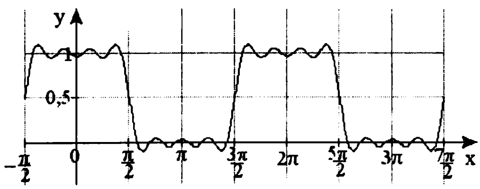


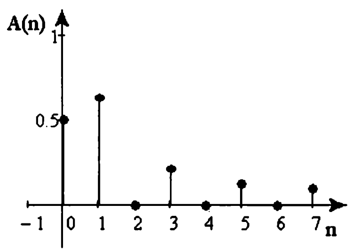
b) Gerade 2π-periodische Funktion: $b_n = 0$;

$a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} 1\,dx = 1$; $a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} 1\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{2}$, $a_1 = \frac{2}{\pi}$; $a_2 = 0$; $a_3 = -\frac{2}{3\pi}$; $a_4 = 0$

usw. $a_n = 0$ für $n \neq 0$ und n gerade. $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = |a_n|$ für $n > 0$.

Somit: $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7}\ldots\right)$





3.26 c) Weder gerade noch ungerade 2π-periodische Funktion;

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{1}{2};\quad a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} 1\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\cdot\pi}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{2};\ a_1 = \frac{1}{\pi};\ a_2 = 0;\ a_3 = -\frac{1}{3\pi};$$

$$a_4 = 0;\ a_5 = \frac{1}{5\pi};\ a_6 = 0;\ a_7 = -\frac{1}{7\pi}\ \text{ usw.};\ a_n = 0 \text{ für } n \neq 0 \text{ und } n \text{ gerade};$$

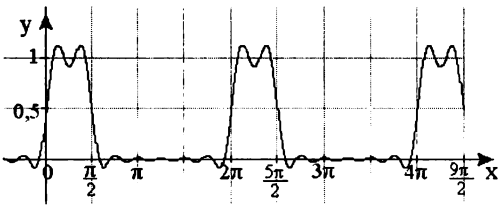
$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} 1\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n\cdot\pi}\cdot\left[1-\cos\frac{n\cdot\pi}{2}\right];\ b_1 = \frac{1}{\pi};\ b_2 = \frac{1}{\pi};\ b_3 = \frac{1}{3\pi};\ b_4 = 0;\ b_5 = \frac{1}{5\pi};$$

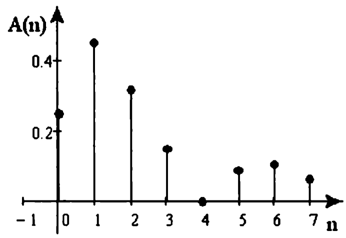
$$b_6 = \frac{1}{3\pi};\ b_7 = \frac{1}{7\pi}\ \text{ usw.};$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{4};\quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2};\ A_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}450;\ A_2 = \frac{1}{2\pi} = 0{,}318;\ A_3 = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} = 0{,}150;$$

$$A_4 = 0;\ A_5 = \frac{\sqrt{2}}{5\pi} = 0{,}090;\ A_6 = \frac{1}{3\pi} = 0{,}106;\ A_7 = \frac{\sqrt{2}}{7\pi} = 0{,}064\ \text{ usw.};$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \ldots\right) + \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{3} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right)$$



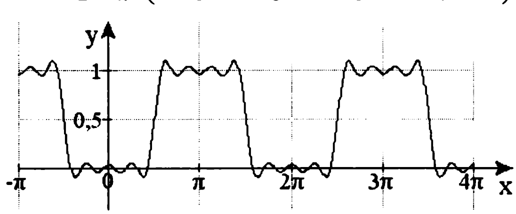


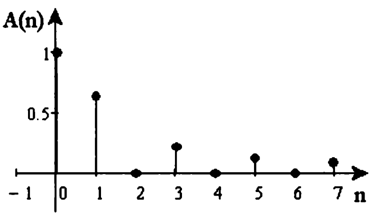
d) Gerade 2π-periodische Funktion; $b_n = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{\pi/2}^{\pi} 1\,dx = 1;\quad a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{\pi/2}^{\pi} 1\cdot\cos(nx)\,dx = -\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{2},\ a_1 = -\frac{2}{\pi};\ a_2 = 0;\ a_3 = \frac{2}{3\pi};\ a_4 = 0;$$

$$a_5 = -\frac{2}{5\pi};\ a_6 = 0;\ a_7 = \frac{2}{7\pi}\ \text{ usw. } a_n = 0 \text{ für } n \neq 0 \text{ und } n \text{ gerade. } A_0 = \frac{a_0}{2},\ A_n = |a_n| \text{ für } n > 0;$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7}\ldots\right)$$





Zwei Integrationsformeln, die in den folgenden Fourier–Reihenentwicklungen Anwendung finden (Herleitung durch partielle Integration):

$$\boxed{\int \underset{u}{x}\cdot\underbrace{\sin(nx)}_{v'}\,dx = \frac{1}{n^2}\cdot\sin(nx) - \frac{x}{n}\cdot\cos(nx)}$$

sowie

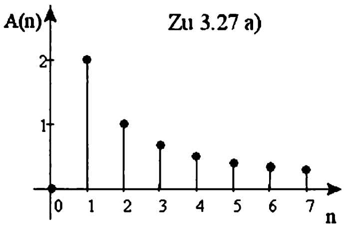
$$\boxed{\int \underset{u}{x}\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx = \frac{1}{n^2}\cdot\cos(nx) + \frac{x}{n}\cdot\sin(nx)}$$

3.27 **a)** Ungerade 2π-periodische Funktion; $a_n = 0$;

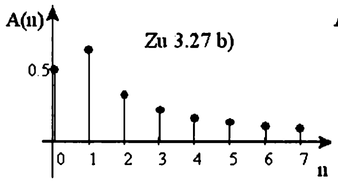
$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(\pi - x)\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\pi\sin(nx)\,dx - \int_0^{\pi}x\cdot\sin(nx)\,dx\right);\quad \int_0^{\pi}\pi\sin(nx)\,dx = \frac{\pi}{n}\cdot\left(1-\cos(n\pi)\right);$$

$$\int_0^{\pi}\underset{u}{x}\cdot\underbrace{\sin(nx)}_{v'}\,dx = \frac{1}{n^2}\cdot\sin(n\pi) - \frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\pi) = -\frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\pi),$$ letzteres weil $\sin(n\pi) = 0$ für n ganzzahlig; damit: $b_n = \frac{2}{n}$; $b_1 = 2$; $b_2 = 1$; $b_3 = \frac{2}{3}$; $b_4 = \frac{1}{2}$; $b_5 = \frac{2}{5}$; $b_6 = \frac{1}{3}$; $b_7 = \frac{2}{7}$ usw.

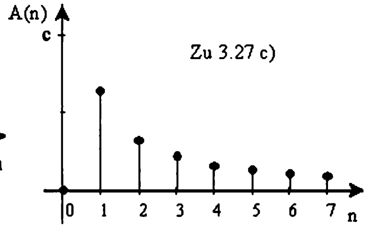
$A_0 = 0$; $A_n = |b_n|$ für $n \geq 1$; $f(x) = 2\cdot\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right)$



Zu 3.27 a)

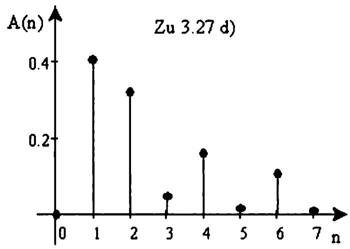


Zu 3.27 b)



Zu 3.27 c)

b) Die Funktion f(x) ist weder gerade noch ungerade. Jedoch ist die Funktion $g(x) = f(x) - 2$ eine ungerade 2π-periodische Funktion. Man kann ihre Fourier-Reihe ermitteln und danach durch $1 + g(x)$ in einfacher Weise wieder zur ursprünglichen Funktion f(x) zurückkehren. $g(x) = -\frac{1}{\pi}\cdot x$; $a_n = 0$



Zu 3.27 d)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\left(-\frac{x}{\pi}\right)\cdot\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi}x\cdot\sin(nx)\,dx$$

$$\int_0^{\pi}\underset{u}{x}\cdot\underbrace{\sin(nx)}_{v'}\,dx = \frac{1}{n^2}\cdot\sin(n\pi) - \frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\pi) = -\frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\pi),$$ letzteres weil $\sin(n\pi) = 0$ für n ganzzahlig; damit: $b_n = \frac{2}{n\pi}\cdot\cos(n\pi)$; $b_1 = -\frac{2}{\pi}$; $b_2 = \frac{1}{\pi}$; $b_3 = -\frac{2}{3\pi}$; $b_4 = \frac{1}{2\pi}$;

$b_5 = -\frac{2}{5\pi}$; $b_6 = \frac{1}{3\pi}$; $b_7 = -\frac{2}{7\pi}$ usw.; $A_0 = \frac{1}{2}$; $A_n = |b_n|$ für $n \geq 1$.

Somit: $f(x) = 1 + g(x) = 1 + \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6} - \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right)$

c) Ungerade 2π-periodische Funktion $f(x) = \frac{c}{\pi}x - c$; $a_n = 0$;

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\left(\frac{c}{\pi}\cdot x - c\right)\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2c}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi}(x-\pi)\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2c}{\pi^2}\cdot\left(\int_0^{\pi}x\cdot\sin(nx)\,dx - \int_0^{\pi}\pi\sin(nx)\,dx\right);$$

$$\int_0^{\pi}\underset{u}{x}\cdot\underbrace{\sin(nx)}_{v'}\,dx = \frac{1}{n^2}\cdot\sin(n\pi) - \frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\pi) = -\frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\pi),$$ letzteres weil $\sin(n\pi) = 0$ für n ganzzahlig; $\int_0^{\pi}\pi\sin(nx)\,dx = \frac{\pi}{n}\cdot\left(1-\cos(n\pi)\right)$; damit: $b_n = -\frac{2c}{n\cdot\pi}$; $A_0 = 0$; $A_n = |b_n| = \frac{2c}{n\cdot\pi}$ für $n \geq 1$;

$$f(x) = -\frac{2\cdot c}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right)$$

3.27 d) Ungerade 2π-periodische Funktion, $f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot x$ für $0\le x<\pi/2$, $f(x)=0$ für $\pi/2\le x<2\pi$;

$$a_n=0;\quad b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\cdot x\cdot\sin(nx)\,dx=\frac{4}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi/2}x\cdot\sin(nx)\,dx;$$

$$\int_0^{\pi/2}\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\sin(nx)}_{v'}dx=\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{n\cdot\pi}{2},\quad b_n=\frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{n\cdot\pi}{2}\right);\quad b_1=\frac{4}{\pi^2},\ b_2=\frac{1}{\pi},$$

$b_3=-\frac{4}{9\pi^2}$, $b_4=-\frac{1}{2\pi}$, $b_5=\frac{4}{25\pi^2}$, $b_6=\frac{1}{3\pi}$, $b_7=-\frac{4}{49\pi^2}$ usw.; $A_0=0$, $A_n=|b_n|$, $n\ge 1$; somit:

$A_1=0{,}405$; $A_2=0{,}318$; $A_3=0{,}045$; $A_4=0{,}159$; $A_5=0{,}016$; $A_6=0{,}106$; $A_7=0{,}008$ usw.;

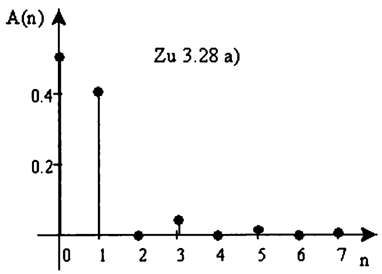
$$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3^2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5^2}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin 6x}{6}-\frac{\sin 7x}{7^2}-\ldots\right)$$

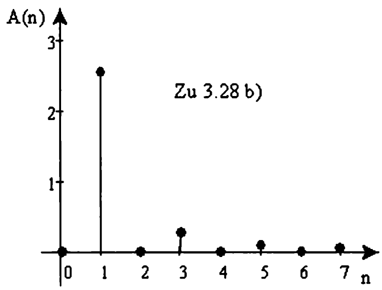
3.28 a) Gerade 2π-periodische Funktion, $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot x$; $b_n=0$; $a_0=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\cdot x\,dx=\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{2}=1$;

$$a_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\cdot x\cdot\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi}x\cdot\cos(nx)\,dx;\quad \int_0^{\pi}\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{v'}dx=\left[\frac{x}{n}\cdot\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cdot\cos(nx)\right]_0^{\pi}=$$

$=\frac{1}{n^2}\cdot\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2}$; $a_n=\frac{2\cdot[\cos(n\pi)-1]}{n^2\pi^2}$ für $n\ge 1$; $A_0=\frac{1}{2}$, $a_n=A_n=\frac{4}{n^2\pi^2}$, wenn n ungerade;

$a_n=A_n=0$, wenn n gerade; $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}+\ldots\right)$





b) Gerade 2π-periodische Funktion, $b_n=0$; $f(x)=2x-\pi$; $a_0=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(2x-\pi)\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left[x^2-\pi\cdot x\right]_0^{\pi}=0$;

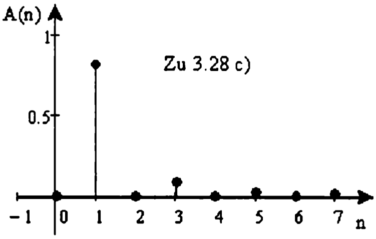
$$a_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(2x-\pi)\cdot\cos(nx)\,dx;\quad \int_0^{\pi}\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{v'}dx=\frac{1}{n^2}\cdot\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2}\ \text{(siehe a))};\quad \int_0^{\pi}\pi\cdot\cos(nx)\,dx=0;$$

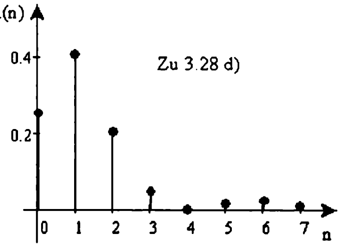
$a_n=\frac{4\cdot[\cos(n\pi)-1]}{n^2\pi}$ für $n\ge 1$; $A_0=0$, $a_n=A_n=\frac{8}{n^2\pi}$, wenn n ungerade; $a_n=A_n=0$, wenn n gerade; $f(x)=-\frac{8}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}\ldots\right)$

3.28 c) Gerade 2π-periodische Funktion, $f(x) = -\frac{2}{\pi}\cdot x + 1$; $a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cdot x + 1\right)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left[-\frac{x^2}{\pi} + x\right]_0^{\pi} = 0$;

$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\cdot x + 1\right)\cdot\cos(nx)dx$; $\int\limits_0^{\pi}\underset{u}{x}\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{v'}dx = \frac{1}{n^2}\cdot\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}$; $\int\limits_0^{\pi}\pi\cdot\cos(nx)dx = 0$;

$a_n = \frac{4\cdot[1-\cos(n\pi)]}{n^2\pi^2}$ für $n \geq 1$; $A_0 = 0$, $a_n = A_n = \frac{8}{n^2\pi^2}$, wenn n ungerade; $a_n = A_n = 0$, wenn n gerade; $f(x) = \frac{8}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \cdots\right)$





d) Gerade 2π-periodische Funktion, $f(x) = -\frac{2}{\pi}\cdot x + 1$ für $0 \leq x < \pi/2$; $f(x) = 0$ für $\pi/2 \leq x < \pi$;

$a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\left(-\frac{2}{\pi}\cdot x + 1\right)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left[x^2 - \pi\cdot x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$; $a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\left(-\frac{2}{\pi}\cdot x + 1\right)\cdot\cos(nx)dx$;

$\int\limits_0^{\pi/2}\underset{u}{x}\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{v'}dx = \frac{1}{n^2}\cdot\cos\frac{n\cdot\pi}{2} - \frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{2}$; $\int\limits_0^{\pi/2}\cos(nx)dx = \frac{1}{n}\cdot\sin\frac{n\cdot\pi}{2}$;

$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$; $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{4}{\pi^2}$, $a_2 = \frac{2}{\pi^2}$, $a_3 = \frac{4}{9\pi^2}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{4}{25\pi^2}$,

$a_6 = \frac{2}{9\pi^2}$, $a_7 = \frac{4}{49\pi^2}$ usw.; $A_0 = \frac{1}{4}$; $A_n = a_n$ für $n \geq 1$;

$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 6x}{18} + \frac{\cos 7x}{7^2}\ldots\right)$

e) Weder gerade, noch ungerade 2π-periodische Funktion; $f(x) = 2x/\pi$ für $0 \leq x < \pi$; $f(x) = 2$ für $\pi \leq x < 2\pi$; $a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi}\frac{2x}{\pi}dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{\pi}^{2\pi}2\,dx = 1 + 2 = 3$; $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi}\frac{2x}{\pi}\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{\pi}^{2\pi}2\cos(nx)dx$;

$\int\limits_0^{\pi}x\cdot\cos(nx)dx = \left[\frac{1}{n^2}\cdot\cos(nx) + \frac{x}{n}\cdot\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}\cdot\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{n}\cdot\sin(n\pi) = \frac{1}{n^2}\cdot[\cos(n\pi) - 1]$;

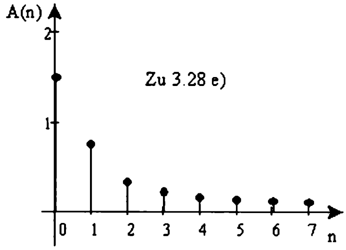
$\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos(nx)dx = 0$; $a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\cdot[\cos(n\pi) - 1]$; $b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi}\frac{2x}{\pi}\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{\pi}^{2\pi}2\sin(nx)dx$;

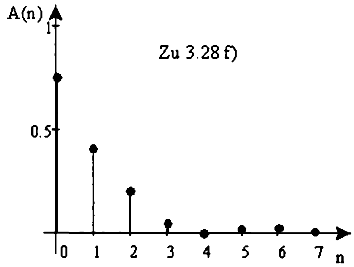
$\int\limits_0^{\pi}x\cdot\sin(nx)dx = \left[\frac{1}{n^2}\cdot\sin(nx) - \frac{x}{n}\cdot\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}\cdot\sin(n\pi) - \frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\pi) = -\frac{\pi}{n}\cdot\cos(n\pi)$;

$\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin(nx)dx = \frac{1}{n}\cdot\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\cdot\cos(2n\pi)$; $b_n = -\frac{2}{n\pi}$; $A_0 = \frac{3}{2}$; $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$:

$A_1 = 0{,}755$; $A_2 = 0{,}318$; $A_3 = 0{,}217$; $A_4 = 0{,}159$; $A_5 = 0{,}128$; $A_6 = 0{,}106$; $A_7 = 0{,}091$ usw.;

$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right) - \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots\right)$





f) Gerade, 2π-periodische Funktion; $f(x) = 2x/\pi$ für $0 \le x < \pi/2$; $f(x) = 1$ für $\pi/2 \le x < 3\pi/2$;

$f(x) = -2x/\pi + 4$ für $3\pi/2 \le x < 2\pi$; $a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi}\,dx + \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$;

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2x}{\pi} \cdot \cos(nx)\,dx + \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{\pi/2}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx)\,dx;$$

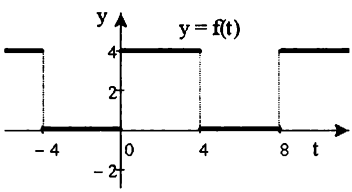
$$\int\limits_0^{\pi/2} x \cdot \cos(nx)\,dx = \left[\frac{1}{n^2} \cdot \cos(nx) + \frac{x}{n} \cdot \sin(nx)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n^2} \cdot \cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{n\pi}{2};$$

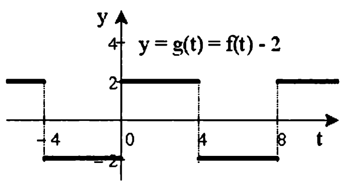
$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx)\,dx = \left[\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{n} \cdot \sin(n\pi) - \frac{1}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{2};\ a_n = \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right);$$

$$a_1 = -\frac{4}{\pi^2},\ a_2 = -\frac{2}{\pi^2},\ a_3 = -\frac{4}{9\pi^2},\ a_4 = 0,\ a_5 = -\frac{4}{25\pi^2},\ a_6 = -\frac{2}{9\pi^2},\ a_7 = -\frac{4}{49\pi^2};\ A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4};$$

$A_n = |a_n|$ für $n \ge 1$; $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 6x}{18} + \frac{\cos 7x}{7^2} \ldots\right)$

3.29 a) $f(t)$ ist weder gerade noch ungerade. Durch $g(t) = f(t) - 2$ erhält man jedoch eine ungerade T-periodische Funktion mit $T = 8$, deren Fourier-Reihe man bestimmt. $f(t) = 2 + g(t)$.

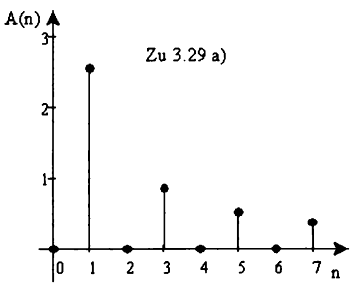


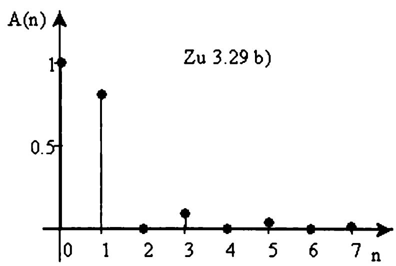


$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4};\ a_n = 0;\ b_n = \frac{4}{8} \cdot \int\limits_0^4 2 \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot t\right)dt = \int\limits_0^4 \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4} \cdot t\right)dt = \frac{4}{n\pi} \cdot [1 - \cos(n\pi)];\ b_1 = \frac{8}{\pi},$$

$b_2 = 0$, $b_3 = \frac{8}{3\pi}$, $b_4 = 0$; $b_5 = \frac{8}{5\pi}$, $b_6 = 0$, $b_7 = \frac{8}{7\pi}$ usw.; $b_n = 0$ wenn n ungerade; $A_0 = 0$;

$A_n = b_n$, $n \ge 1$; $f(t) = g(t) + 2 = 2 + \frac{8}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + \frac{1}{5} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}t\right) + \frac{1}{7} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right) + \ldots\right]$





3.29 **b)** Gerade, T-periodische Funktion mit T = 10; $f(t)=\frac{2}{5}\cdot t$ für $0 \le t < 5$; $\omega_0=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$; $b_n = 0$;

$$a_0=\frac{4}{10}\cdot\int_0^5 \frac{2}{5}t\,dt=2;\quad a_n=\frac{4}{10}\cdot\int_0^5 \frac{2}{5}t\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{5}\cdot t\right)dt=\frac{4}{25}\cdot\int_0^5 t\cdot\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{5}\cdot t\right)dt=$$

$$=\frac{4}{25}\cdot\left[\frac{25}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi t}{5}+\frac{5t}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi t}{5}\right]_0^5=\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2\pi^2}+\frac{4}{n\pi}\cdot\sin(n\pi)=\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot[\cos(n\pi)-1];$$

$a_1=-\frac{8}{\pi^2}$; $a_2 = 0$; $a_3=-\frac{8}{3^2\pi^2}$; $a_4 = 0$; $a_5=-\frac{8}{5^2\pi^2}$; $a_6 = 0$; $a_7=-\frac{8}{7^2\pi^2}$ usw.; $a_n = 0$ wenn n gerade; $A_0=\frac{a_0}{2}=1$, $A_n = |a_n|$ für $n \ge 1$;

$$f(t)=1-\frac{8}{\pi^2}\cdot\left[\frac{1}{1^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)+\frac{1}{3^2}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{5}t\right)+\frac{1}{5^2}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{5}t\right)+\frac{1}{7^2}\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{5}t\right)+\ldots\right]$$

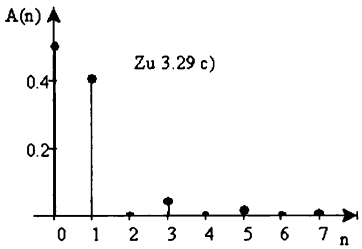
c) Gerade, T-periodische Funktion mit $T = \pi$; $f(t)=\frac{2}{\pi}\cdot t$ für $0 \le t < \pi/2$; $\omega_0=\frac{2\pi}{\pi}=2$; $b_n = 0$;

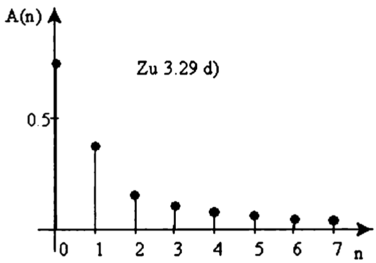
$$a_0=\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}t\,dt=1;\quad a_n=\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}t\cdot\cos(n\cdot 2\cdot t)dt=\frac{8}{\pi^2}\cdot\int_0^{\pi/2}t\cdot\cos(2nt)dt=$$

$$=\frac{8}{\pi^2}\cdot\left[\frac{1}{4n^2}\cdot\cos(2nt)+\frac{t}{2n}\cdot\sin(2nt)\right]_0^{\pi/2}=\frac{2}{n^2\pi^2}\cdot\cos(n\pi)-\frac{2}{n^2\pi^2}+\frac{2}{n\pi}\cdot\sin(n\pi)=\frac{2}{n^2\pi^2}\cdot[\cos(n\pi)-1];$$

$a_1=-\frac{4}{\pi^2}$; $a_2 = 0$; $a_3=-\frac{4}{3^2\pi^2}$; $a_4 = 0$; $a_5=-\frac{4}{5^2\pi^2}$; $a_6 = 0$; $a_7=-\frac{4}{7^2\pi^2}$ usw.; $a_n = 0$ wenn n gerade; $A_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}$, $A_n = |a_n|$ für $n \ge 1$;

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cdot\left[\frac{1}{1^2}\cdot\cos(2t)+\frac{1}{3^2}\cdot\cos(6t)+\frac{1}{5^2}\cdot\cos(10t)+\frac{1}{7^2}\cdot\cos(14t)+\ldots\right]$$





d) Weder gerade, noch ungerade T-periodische Funktion mit T = 4; $f(t) = t/2$ für $0 \le t < 2$;

$f(t) = 1$ für $2 \le t < 4$; $\omega_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$; $a_0=\frac{2}{4}\cdot\left(\int_0^2\frac{1}{2}t\,dt+\int_2^4 1\,dt\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+2)=\frac{3}{2}$;

$$a_n=\frac{2}{4}\cdot\left(\int_0^2\frac{1}{2}t\cdot\cos\frac{n\pi t}{2}dt+\int_2^4 1\cdot\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt\right);\quad \int_0^2 t\cdot\cos\frac{n\pi t}{2}dt=\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi t}{2}+\frac{2t}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi t}{2}\right]_0^2=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\cos(n\pi)-\frac{4}{n^2\pi^2}+\frac{4}{n\pi}\cdot\sin(n\pi)=\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot[\cos(n\pi)-1];$$

$\int_2^4 1\cdot\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt=\frac{2}{n\pi}\cdot[\sin(2n\pi)-\sin(n\pi)]=0$, da n ganzzahlig; $a_n=\frac{1}{n^2\pi^2}\cdot[\cos(n\pi)-1]$;

$$b_n=\frac{2}{4}\cdot\left(\int_0^2\frac{1}{2}t\cdot\sin\frac{n\pi t}{2}dt+\int_2^4 1\cdot\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt\right);$$

3.29 e) Forts.
$$\int_0^2 t\cdot\sin\frac{n\pi t}{2}dt=\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi t}{2}+\frac{2t}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\sin(n\pi)-\frac{4}{n\pi}\cdot\cos(n\pi)=-\frac{4}{n\pi}\cdot\cos(n\pi);$$
$$\int_2^4 1\cdot\sin\frac{n\pi t}{2}dt=\frac{2}{n\pi}\cdot[\cos(n\pi)-\cos(2n\pi)]=\frac{2}{n\pi}\cdot[\cos(n\pi)-1)];\quad b_n=\frac{2}{4}\cdot\left(-\frac{2}{n\pi}\right)=-\frac{1}{n\pi};$$
$A_0=\frac{a_0}{2}=\frac{3}{4}$; $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ für $n\geq 1$; $A_1=0{,}377$; $A_2=0{,}159$; $A_3=0{,}108$; ..., $A_7=0{,}046$;
$$f(t)=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\cdot\left[\frac{1}{1^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\frac{1}{3^2}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{1}{5^2}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right)+\frac{1}{7^2}\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{2}t\right)+\ldots\right]+$$
$$-\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{1}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\frac{1}{2}\cdot\sin(\pi t)+\frac{1}{3}\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)+\frac{1}{4}\cdot\sin(2\pi t)+\ldots+\frac{1}{7}\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{2}t\right)+\ldots\right]$$

3.30 Gerade T-periodische Funktion mit $T=\pi$; $\omega_0=\frac{2\pi}{\pi}=2$; $b_n=0$; $a_0=\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin 2x\,dx=\frac{4}{\pi}$;

$a_n=\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin(x)\cdot\cos(2nx)dx$; 2. Summensatz: $2\sin(x)\cdot\cos(2nx)=\sin(x+2nx)+\sin(x-2nx)$;
$$a_n=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2}[\sin(x+2nx)+\sin(x-2nx)]dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left[-\frac{1}{2n+1}\cos(x+2nx)-\frac{1}{1-2n}\cos(x-2nx)\right]_0^{\pi/2}=$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\left[-\frac{1}{2n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)-\frac{1}{1-2n}\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{1-2n}\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\left[-0-\cdot0+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{1-2n}\right]=$$
$=-\frac{4}{\pi\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$ für $n\geq 1$; $A_0=\frac{2}{\pi}$; $A_n=\frac{4}{\pi\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$ für $n\geq 1$; Abb. nächste Seite.
$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{\cos(1\cdot2x)}{1\cdot3}+\frac{\cos(2\cdot2x)}{3\cdot5}+\frac{\cos(3\cdot2x)}{5\cdot7}+\frac{\cos(4\cdot2x)}{7\cdot9}+\frac{\cos(5\cdot2x)}{9\cdot11}+\frac{\cos(6\cdot2x)}{11\cdot13}+\frac{\cos(7\cdot2x)}{13\cdot15}+\ldots\right]$$

3.31 Weder gerade, noch ungerade 2π-periodische Funktion; $T=2\pi$; $\omega_0=\frac{2\pi}{2\pi}=1$;

$a_0=\frac{2}{2\pi}\cdot\left[\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}0\,dx\right]=\frac{2}{\pi}$; $a_n=\frac{2}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin(x)\cdot\cos(nx)dx$; Fallunterscheidung für n nötig!

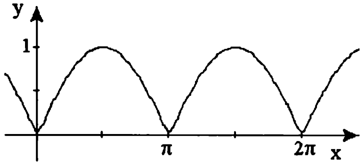
$n=1$: $a_n=\frac{2}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin x\cdot\cos x\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}2\sin x\cdot\cos x\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin(2x)dx=0$;

$n\neq 1$: 2. Summensatz: $2\sin(x)\cdot\cos(nx)=\sin(x+nx)+\sin(x-nx)$;
$$a_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{n+1}\cos(x+nx)-\frac{1}{1-n}\cos(x-nx)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{n+1}\cos(\pi+n\pi)-\frac{1}{1-n}\cos(\pi-n\pi)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{n+1}\cos(n\pi)+\frac{1}{1-n}\cos(n\pi)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right]=-\frac{1+\cos(n\pi)}{(n-1)\cdot(n+1)\cdot\pi};$$

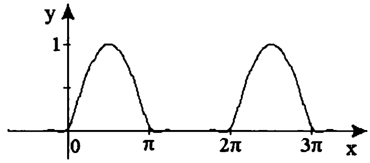
$n=1$: $b_n=\frac{2}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin x\cdot\sin x\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}2\sin^2x\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}(1-\cos(2))dx=\frac{1}{2}$;

$n\neq 1$: $b_n=\frac{2}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin x\cdot\sin(nx)dx$; 2. Summensatz: $2\sin x\cdot\sin(nx)=-\cos(x+nx)+\cos(x-nx)$;
$$b_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{n+1}\sin(x+nx)+\frac{1}{1-n}\sin(x-nx)\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{n+1}\sin(\pi+n\pi)+\frac{1}{1-n}\sin(\pi-n\pi)+0+0\right]=0;$$
$f(x)=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot7}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\cdot\sin x$; Abbildung nächste Seite.

Zu 3.30: Reihe bis zur 7. Oberschwingung



Zu 3.31: Reihe bis zur 7. Oberschwingung



3.32 Ungerade 2π-periodische Funktion; $a_n = 0$; $b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot[\cos(n\pi)-1]$;

$b_1 = -\frac{2}{1\cdot\pi}\cdot[\cos(1\cdot\pi)-1] = -\frac{2}{1\cdot\pi}\cdot[-1-1] = \frac{4}{\pi}$; $b_2 = -\frac{2}{2\cdot\pi}\cdot[\cos(2\pi)-1] = -\frac{2}{1\cdot\pi}\cdot[1-1] = 0$;

allgemein: $b_n = \frac{2}{n\cdot\pi}$ für n ungerade, $b_n = 0$ für n gerade. Somit:

$f(x) = \frac{4}{\pi}\cdot\sin x + \frac{4}{3\pi}\cdot\sin 3x + \frac{4}{7\pi}\cdot\sin 7x + \ldots$; Einsetzen $x = \frac{\pi}{2}$:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3\pi}\cdot\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{7\pi}\cdot\sin\left(7\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \ldots = \frac{4}{\pi}\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$. Andererseits ist $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Somit: $1 = \frac{4}{\pi}\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right)$. Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{\pi}{4}$ ergibt die Behauptung.

3.33 Gerade 2π-periodische Funktion, $f(x) = x$ für $0 \le x < \pi$; $b_n = 0$; $a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$;

$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos(nx)\,dx$; $\int\limits_0^{\pi} \underset{u}{x}\cdot\underbrace{\cos(nx)}_{v'}\,dx = \left[\frac{x}{n}\cdot\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cdot\cos(nx)\right]_0^{\pi} =$

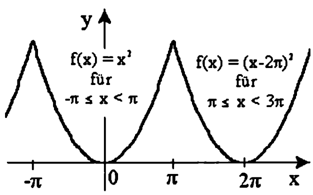
$= \frac{1}{n^2}\cdot\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}$; $a_n = \frac{2\cdot[\cos(n\pi)-1]}{n^2\pi}$ für $n \ge 1$; $a_n = \frac{4}{n^2\pi}$, wenn n ungerade,

$a_n = 0$, wenn n gerade; $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right)$. Einsetzen $x = 0$:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos 0}{1^2} + \frac{\cos(3\cdot 0)}{3^2} + \frac{\cos(5\cdot 0)}{5^2} + \frac{\cos(7\cdot 0)}{7^2} + \ldots\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right).$$

Andererseits ist $f(0) = 0$. Somit: $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right)$, woraus durch Umformung die Behauptung folgt.

3.34 Gerade 2π-periodische Funktion, $f(x) = x$ für $0 \le x < \pi$;



$b_n = 0$; $a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$; $a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi} x^2\cdot\cos(nx)\,dx$;

Zweimalige partielle Integration:

$\int x^2\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{x^2}{n}\cdot\sin(nx) - \frac{2}{n}\cdot\int x\cdot\sin(nx)\,dx =$

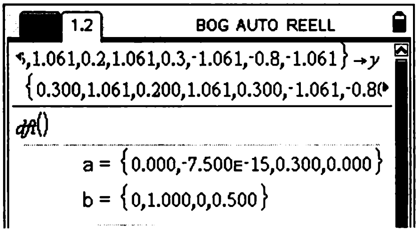
$= \frac{x^2}{n}\cdot\sin(nx) - \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{1}{n^2}\cdot\sin(nx) - \frac{x}{n}\cdot\cos(nx)\right) = \frac{x^2}{n}\cdot\sin(nx) + \frac{2x}{n^2}\cdot\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\cdot\sin(nx)$;

$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{x^2}{n}\cdot\sin(nx) + \frac{2x}{n^2}\cdot\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\cdot\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}\cdot\cos(n\pi)$ für $n \ge 1$;

3.34 Forts. $f(x)=\frac{\pi^2}{3}-4\cdot\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ \ldots\right)$; $f(0)=\frac{\pi^2}{3}-4\cdot\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ \ldots\right)$; da andererseits f(0) = 0 ist, folgt daraus nach Umformung, dass $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ \ldots=\frac{\pi^2}{12}$.

$f(\pi)=\frac{\pi^2}{3}-4\cdot\left(\frac{-1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{-1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ \ldots\right)=\frac{\pi^2}{3}+4\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ \ldots\right)$; da andererseits $f(\pi)=\pi^2$ ist, folgt daraus nach Umformung, dass $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ \ldots=\frac{\pi^2}{6}$

3.35 Konkrete Berechnung nach Beispiel 3.15, Lehrbuch Seite 118. Die Abtastwerte werden in einer Liste zusammengefasst und diese vor dem Programmaufruf unter y abgespeichert. Im Folgenden ein einfach gehaltenes Programm für den TI–*nspire* (gleich auch für den *Voyage 200* möglich)

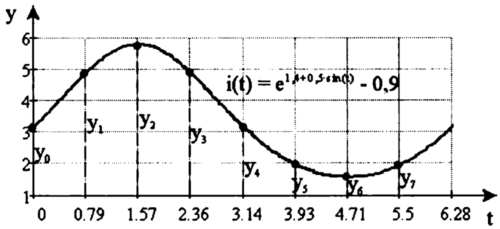



```
Define dft()=
Prgm
Local nn,m,n,k
dim(y)→nn  © Anzahl der Abtastwerte
iPart((nn−1)/2)→m  © Reihe bis m−te Oberschwingung
For n,0,m
(1/nn)·Σ(k=0, nn−1)(y[k+1]·e^((−i·n·k·2·π)/nn))→c[n+1]
2·real(c[n+1])→a[n+1]
−2·imag(c[n+1])→b[n+1]
EndFor
Disp "a = ",a :  Disp "b = ",b
EndPrgm
```

3.36 Periode: $T := 2\cdot\pi \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T} = 1$

$t := 0, 0.01 .. T \qquad i(t) := e^{(1.4+0.5\cdot\sin(t))} - 0.9$

$N := 8 \qquad \Delta t := \frac{T}{N} = 0.79$



Abtastwerte: $y :=$ for $k \in 0..N-1$
$\quad y_k \leftarrow i(k\cdot\Delta t)$

$y = \begin{pmatrix} 5.780 \\ 4.875 \\ 3.155 \\ 1.948 \\ 1.56 \\ 1.948 \end{pmatrix}$

Bis zur M-ten Oberschwingung:

$M := \mathrm{trunc}\left(\frac{N-1}{2}\right) = 3$

$c :=$ for $n \in 0..N-1$
$\quad c_n \leftarrow \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\left(y_k\cdot\exp\left(-j\cdot n\cdot k\cdot\frac{2\pi}{N}\right)\right)$

$a :=$ for $n \in 0..M$
$\quad a_n \leftarrow 2\cdot\mathrm{Re}(c_n)$

$b :=$ for $n \in 1..M$
$\quad a_n \leftarrow -2\cdot\mathrm{Im}(c_n)$

$a = \begin{pmatrix} 6.825 \\ 0 \\ -0.259 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.092 \\ 0 \\ -0.022 \end{pmatrix}$

$A :=$ for $n \in 0..M$
$\quad A_n \leftarrow \mathrm{wenn}\left[n = 0, \frac{a_0}{2}, \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}\right]$

$A = \begin{pmatrix} 3.413 \\ 2.092 \\ 0.259 \\ 0.022 \end{pmatrix}$

$\text{Klirrfaktor} := \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{M}(A_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(A_i)^2}} = 0.123$

Somit lautet die Näherung bis zur 3. Oberschwingung:
$i(t) \approx s_3(t) = 3{,}413 - 0{,}259\cdot\cos(2t) + 2{,}092\cdot\sin(t) - 0{,}022\cdot\sin(3t)$; Klirrfaktor: 12,3%

3.37 Weder gerade, noch ungerade T-periodische Funkt. mit T = 2; $f(t) = e^{-t}$ für $0 \le t < 2$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

$$a_0 = \frac{2}{2} \cdot \int_0^2 e^{-t}\,dt = 1 - e^{-2} = 0{,}8647;\ \frac{a_0}{2} = 0{,}4323;\ a_n = \frac{2}{2} \cdot \int_0^2 e^{-t} \cdot \cos(n\pi t)\,dt = \frac{e^2 - \cos(2n\pi)}{e^2 \cdot (n^2\pi^2 + 1)};$$

$$a_1 = 0{,}0795;\ a_2 = 0{,}0214;\ b_n = \frac{2}{2} \cdot \int_0^2 e^{-t} \cdot \sin(n\pi t)\,dt = \pi n \cdot \frac{e^2 - \cos(2n\pi)}{e^2 \cdot (n^2\pi^2 + 1)};\ b_1 = 0{,}2499;\ b_2 = 0{,}1342.$$

Lösung mit Mathcad: $f(t) := \exp(-t)$ Periode: $T := 2$ $\omega_0 := \frac{2\pi}{T} = 3.1416$

a) $N := 64$ $\Delta t := \frac{T}{N} = 0.03125$ Abtastwerte: $y :=$ for $k \in 0..N-1$
$y_k \leftarrow f(k \cdot \Delta t)$

$c := \mathrm{FFT}(y)$ $a := 2 \cdot \mathrm{Re}(c)$ $b := -2 \cdot \mathrm{Im}(c)$

$\frac{a_0}{2} = 0.4391$ $a_1 = 0.0931$ $a_2 = 0.0349$ $b_1 = 0.2497$ $b_2 = 0.1338$

b) $N := 1024$ $\Delta t := \frac{T}{N} = 0.00195$ Abtastwerte: $y :=$ for $k \in 0..N-1$
$y_k \leftarrow f(k \cdot \Delta t)$

$c := \mathrm{FFT}(y)$ $a := 2 \cdot \mathrm{Re}(c)$ $b := -2 \cdot \mathrm{Im}(c)$

$\frac{a_0}{2} = 0.4328$ $a_1 = 0.0804$ $a_2 = 0.0222$ $b_1 = 0.2499$ $b_2 = 0.1342$

c) $N := 16384$ $\Delta t := \frac{T}{N} = 0.00012$ Abtastwerte: $y :=$ for $k \in 0..N-1$
$y_k \leftarrow f(k \cdot \Delta t)$

$c := \mathrm{FFT}(y)$ $a := 2 \cdot \mathrm{Re}(c)$ $b := -2 \cdot \mathrm{Im}(c)$

$\frac{a_0}{2} = 0.4324$ $a_1 = 0.0796$ $a_2 = 0.0214$ $b_1 = 0.2499$ $b_2 = 0.1342$

3.38 **a)** Weder gerade, noch ungerade T-periodische Funktion mit T = 4; $f(t) = 1$ für $0 \le t < 1$;

$$f(t) = 0 \text{ für } 1 \le t < 4;\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2};\ a_0 = \frac{2}{4} \cdot \int_0^1 1\,dx = \frac{1}{2};\ a_n = \frac{2}{4} \cdot \int_0^1 1 \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot t\right)dt = \frac{1}{n\pi} \cdot \sin\frac{n\pi}{2};$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi};\ a_2 = 0;\ a_3 = -\frac{1}{3\pi};\ a_4 = 0;\ a_5 = \frac{1}{5\pi};\ a_6 = 0;\ a_7 = -\frac{1}{7\pi} \text{ usw.}$$

$$b_n = \frac{2}{4} \cdot \int_0^1 1 \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \cdot t\right)dt = \frac{1}{n\pi} \cdot \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right);\ b_1 = \frac{1}{\pi};\ b_2 = \frac{1}{\pi};\ b_3 = \frac{1}{3\pi};\ b_4 = 0;\ b_5 = \frac{1}{5\pi};\ b_6 = \frac{1}{3\pi};$$

$$b_7 = \frac{1}{7\pi} \text{ usw.};\ f(t) = 0{,}25 + 0{,}3183 \cdot \cos\frac{\pi t}{2} - 0{,}1061 \cdot \cos\frac{3\pi t}{2} + 0{,}0637 \cdot \cos\frac{5\pi t}{2} - 0{,}0455 \cdot \cos\frac{7\pi t}{2} + \ldots$$

$$+ 0{,}3183 \cdot \sin\frac{\pi t}{2} + 0{,}3183 \cdot \sin\frac{2\pi t}{2} + 0{,}1061 \cdot \sin\frac{3\pi t}{2} + 0{,}0637 \cdot \sin\frac{5\pi t}{2} + 0{,}1061 \cdot \sin\frac{6\pi t}{2} + 0{,}0455 \cdot \sin\frac{7\pi t}{2} + \ldots$$

3.38 **b)** Lösung mit Mathcad: $T := 4$ $\quad f(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } (t \geq 0) \wedge (t < 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $\quad N := 8192$ $\quad \Delta t := \frac{T}{N} = 0.000488$

Abtastwerte: $y := \text{for } k \in 0..N-1$, $y_k \leftarrow f(k \cdot \Delta t)$ $\quad c := \text{FFT}(y)$ $\quad a := 2 \cdot \text{Re}(c)$ $\quad b := -2 \cdot \text{Im}(c)$

$a_0 = 0.5$ $\quad a_1 = 0.3184$ $\quad a_2 = 0.0002$ $\quad a_3 = -0.106$ $\quad a_4 = 0$ $\quad a_5 = 0.0638$ $\quad a_6 = 0.0002$ $\quad a_7 = -0.0454$

$b_0 = 0$ $\quad b_1 = 0.3182$ $\quad b_2 = 0.3183$ $\quad b_3 = 0.1062$ $\quad b_4 = 0$ $\quad b_5 = 0.0635$ $\quad b_6 = 0.1061$ $\quad b_7 = 0.0456$

3.39 Auftretende Kreisfrequenzen: $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi = \frac{5\pi}{5}$. Als Grundfrequenz ω_0 kann daher $\frac{\pi}{5}$ gelten, damit $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 10$. Dann treten noch Oberschwingungen bis zur Ordnung M = 5 auf. Abtastanzahl $N \geq 2M + 1$, also N mindestens 2M + 1 = 11. N > 11 wäre bei der vorliegenden Funktion unnötig.

Lösung mit Mathcad $f(t) := \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right) + 0.5 \cdot \cos\left(3\frac{\pi}{5} \cdot t\right) + 0.8 \cdot \sin(\pi \cdot t)$ $\quad \omega_0 := \frac{\pi}{5}$ $\quad T := \frac{2\pi}{\omega_0} = 10$

$N := 11$ $\quad \Delta t := \frac{T}{N} = 0.909091$ $\quad$ Abtastwerte: $y := \text{for } k \in 0..N-1$, $y_k \leftarrow f(k \cdot \Delta t)$ $\quad n := 0..\frac{N-1}{2}$

$$a_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(y_k \cdot \cos\left(n \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)\right) \qquad b_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(y_k \cdot \sin\left(n \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)\right) \qquad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Lösung mit TI–*nspire* (*Voyage 200*): Programm dft() siehe Seite 67.

$\cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right) + 0.5 \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{5} \cdot t\right) + 0.8 \cdot \sin(\pi \cdot t) \rightarrow f(t)$ — *Fertig*

For k,0,10:$f\left(\frac{k \cdot 10}{11}\right) \rightarrow y[k+1]$:EndFor — 0.545

dft()

a =
{9.091E-15,1.000,5.636E-14,0.500,2.909E-14,1.0S

b = {0,0,2.000E-14,-1.818E-15,3.091E-14,0.800}

3.40 Periode $\omega_0 = 2\pi/T = 34{,}91\ \mathrm{s}^{-1}$; Abtastanzahl $N = 18$;

Lösung mit Mathcad: Periode: $T := 0.18$ $\quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T} = 34.907$ $\quad \Delta t := 0.01$ $\quad N := \frac{T}{\Delta t} = 18$

Bis zur M-ten Oberschwingung: $M := \mathrm{trunc}\left(\frac{N-1}{2}\right) = 8$

Abtastwerte: $y := \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.85 \\ 2.53 \\ 2.79 \\ 2.45 \\ 2.45 \\ 2.79 \\ 2.53 \\ 2.85 \\ 2.50 \\ 1.91 \\ 1.64 \\ 0.71 \\ 0.61 \\ 0.61 \\ 0.71 \\ 1.64 \\ 1.91 \end{pmatrix}$

$$c := \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..N-1 \\ \quad c_n \leftarrow \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(y_k \cdot \exp\left(-j \cdot n \cdot k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)\right) \end{array}$$

$$a := \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..M \\ \quad a_n \leftarrow 2 \cdot \mathrm{Re}(c_n) \end{array} = \begin{pmatrix} 4.00 \\ 0.00 \\ 0.50 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..M \\ \quad b_n \leftarrow -2 \cdot \mathrm{Im}(c_n) \end{array} = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 1.00 \\ 0.00 \\ -0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.20 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

$f(t) = 2 + 0{,}5 \cdot \cos(2\omega_0 \cdot t) + \sin(\omega_0 \cdot t) + 0{,}2 \cdot \sin(7\omega_0 \cdot t)$ mit $\omega_0 = 34{,}91\ \mathrm{s}^{-1}$.

4 Differentialgleichungen

4.1 **a)** $y' = 3x + 1;\ \ y = \int(3x+1)\,dx = \frac{3}{2}\cdot x^2 + x + C$

b) $y' = -x - 2;\ y = \int(-x-2)\,dx = -\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2x + C$

c) $y' = -x^2 + 4x + 1;\ y = \int(-x^2+4x+1)\,dx = -\frac{1}{3}\cdot x^3 + 2x^2 + x + C$

d) $y'' = -6x;\ \ y' = \int(-6x)\,dx = -3x^2 + C_1;\ \ y = \int(-3x^2 + C_1)\,dx = -x^3 + C_1x + C_2$

e) $y' = \int(-6x+3)\,dx = -3x^2 + 3x + C_1;\ \ y = \int(-3x^2+3x+C_1)\,dx = -x^3 + \frac{3}{2}\cdot x^2 + C_1x + C_2$

f) $y' = \int(-12x^2+4x+1)\,dx = -4x^3 + 2x^2 + x + C_1;\ \ y = \int y'\,dx = -x^4 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$

4.2 **a)** $y = \int(2x+3)\,dx = x^2 + 3x + C;\ \ y(3) = 3^2 + 3\cdot 3 + C = 1 \ \Rightarrow\ C = -17;\ \ y = x^2 + 3x - 17$

b) $y = \int(-x^2+x+1)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C;\ \ y(6) = -\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} + 6 + C = -48 - C = 0 \ \Rightarrow\ C = 48;$

$y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 48$

c) $y' = \int(x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1;\ \ y'(1) = 0;\ \frac{1^2}{2} - 1 + C_1 = 0 \ \Rightarrow\ C_1 = \frac{1}{2};\ y' = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2};$

$y = \int y'\,dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + C_2;\ \ y(1) = 0;\ y = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C_2 \ \Rightarrow\ C_2 = -\frac{1}{6};$

$y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{6}$

d) $y' = \int(-6x^2 - x + 1)\,dx = -2x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C_1;\ \ y'(0) = 5; -0 - 0 + 0 + C_1 = 5 \Rightarrow\ C_1 = 5;$

$y' = -2x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 5;\ y = \int y'\,dx = -\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 5x + C_2;\ \ y(0) = 2;$

$y = -0 - 0 + 0 + 0 + C_2 = 2 \ \Rightarrow\ C_2 = 2;\ \ y = -\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 5x + 2$

4.3 a) $y' = \int(2x-1)\,dx = x^2 - x + C_1;\ \ y = \int y'\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1\cdot x + C_2;$

$y(0) = 0 - 0 + 0 + C_2 = 1 \ \Rightarrow\ C_2 = 1;\ \ y(6) = \frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} + C_1\cdot 6 + 1 = 0 \ \Rightarrow\ C_1 = -9;$

$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 9x + 1$

b) $y' = \int(x-3)\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + C_1;\ \ y = \int y'\,dx = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + C_1\cdot x + C_2;$

$y(3) = \frac{3^3}{6} - \frac{3\cdot 3^2}{2} + C_1\cdot 3 + C_2 = 1;\ \ y(9) = \frac{9^3}{6} - \frac{3\cdot 9^2}{2} + C_1\cdot 9 + C_2 = 10;$ Lösung dieses linearen Gleichungssystems: $C_1 = 0;\ C_2 = 10;\ y = \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 10$

4.4 Gleichung der Biegelinie eines Trägers ("Ingenieur–Mathematik 3", Seite 268): $y'' = -\frac{M_b}{E \cdot I}$.

$$y'' = -\frac{F \cdot x}{2 \cdot EI};\quad y' = -\int \frac{F \cdot x}{2 \cdot EI} dx = -\frac{F}{2 \cdot EI}\int x \cdot dx = -\frac{F}{2 \cdot EI}\frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$y = \int\left(-\frac{F}{2 \cdot EI}\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx = -\frac{F}{12 \cdot EI} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2;\quad y(0) = -\frac{F}{12 \cdot EI} \cdot 0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0;$$

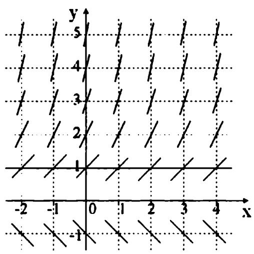
$$y'\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{F}{4 \cdot EI} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{F}{16 \cdot EI} \cdot L^2;$$

$$y = -\frac{F}{12 \cdot EI} \cdot x^3 + \frac{F}{16 \cdot EI} \cdot L^2 \cdot x = \frac{F \cdot L^3}{16 \cdot EI} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{4x^3}{3L^3}\right) \quad \text{für } 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

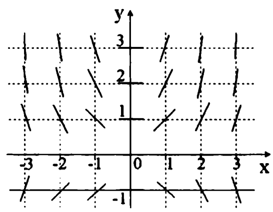
Zum Rechnen mit Beträgen (im Folgenden öfters der Fall):

- Weglassen der Betragstriche: Weiß man, dass a positiv oder null ist, so kann man $|a| = a$ schreiben. Weiß man, dass a negativ ist, so kann man $|a| = -a$ schreiben.
- Es sei etwa $|a| = 3$. Daraus folgt, dass $a = 3$ oder auch -3 sein könnte! Man schreibt kurz: $a = \pm 3$.
- Weiters gilt: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ sowie auch $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. Lesart auch von rechts nach links!

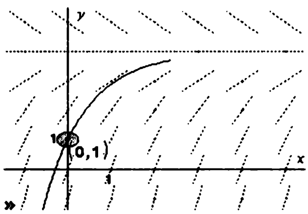
4.5 a)



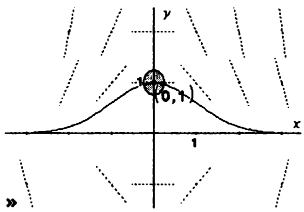
b)



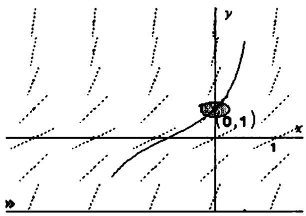
4.6 a)



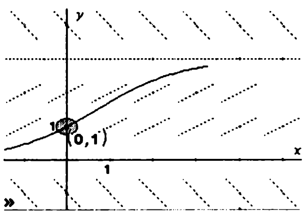
b)



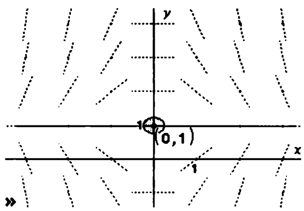
c)



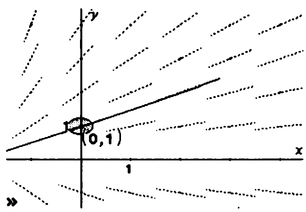
d)



e)



f)



a) $\frac{dy}{dx} = 4 - y;\quad \frac{dy}{4-y} = dx;\quad \int\frac{dy}{4-y} = \int dx;\ -\ln|4-y| = x + \overline{C};\quad \ln|4-y| = -x - \overline{C};$

$|4-y| = e^{-x-\overline{C}} = e^{-x} \cdot e^{-\overline{C}};\ 4 - y = \underbrace{\pm e^{-\overline{C}}}_{C} \cdot e^{-x};\ y = 4 - C \cdot e^{-x};\ y(0) = 1 \Rightarrow C = 3;\ y = 4 - 3 \cdot e^{-x}$

b) $\frac{dy}{dx} = -x \cdot y;\quad \frac{dy}{y} = -x\,dx;\quad \int\frac{dy}{y} = -\int x\,dx;\quad \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \overline{C};\quad |y| = e^{-\frac{x^2}{2} + \overline{C}};$

$y = \pm e^{-\frac{x^2}{2} + \overline{C}} = \underbrace{\pm e^{\overline{C}}}_{C} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}};\ y(0) = 1 \Rightarrow C = 1;\quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

4.6 **c)** $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$; $\frac{dy}{1+y^2} = dx$; $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$; arctan $y = x + C \Rightarrow y = \tan(x + C)$;

$y(0) = \tan C = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$; $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot y \cdot (3 - y)$; $\int \frac{dy}{y \cdot (3-y)} = \frac{1}{3} \cdot \int dx$; $\int \frac{dy}{y \cdot (y-3)} = -\frac{1}{3} \cdot \int dx$;

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{y \cdot (y-3)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-3}$; mit $y \cdot (y-3)$ multiplizieren; $1 = A \cdot (y-3) + B \cdot y$; $y = 3$:

$1 = A \cdot 0 + B \cdot 3 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$; $y = 0$: $1 = A \cdot (-3) + B \cdot 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$; somit:

$\int \frac{dy}{y \cdot (y-3)} = -\int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y-3} dy = -\frac{1}{3} \cdot \ln|y| + \frac{1}{3} \cdot \ln|y - 3| = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{|y-3|}{|y|} = \frac{1}{3} \cdot \ln\left|\frac{y-3}{y}\right|$;

$\frac{1}{3} \cdot \ln\left|\frac{y-3}{y}\right| = -\frac{1}{3} \cdot \int dx = -\frac{1}{3} \cdot \left(x + \overline{C}\right)$; $\ln\left|\frac{y-3}{y}\right| = -x - \overline{C}$; $\left|\frac{y-3}{y}\right| = e^{-x-\overline{C}}$;

$\frac{y-3}{y} = \underbrace{\pm e^{-\overline{C}}}_{C*} \cdot e^{-x}$; $y = \frac{3 \cdot e^x}{e^x - C*} = \frac{3}{1 + e^{-x}/(-C*)} = \frac{3}{1 + C \cdot e^{-x}}$; $y(0) = 1 \Rightarrow C = 2$; $y = \frac{3}{1 + 2 \cdot e^{-x}}$

TI–*nspire* (*Voyage 200*): Dividiert man Zähler und Nenner durch e^x, so erhält man die Form des errechneten Ergebnisses.

$\text{deSolve}\left(y' = \frac{1}{3} \cdot y \cdot (3-y) \text{ and } y(0) = 1, x, y\right)$ $\quad y = \frac{3 \cdot e^x}{e^x + 2}$

e) $\frac{dy}{dx} = x \cdot (1 - y)$; $\int \frac{dy}{1-y} = \int x\,dx$; $-\ln|1 - y| = \frac{x^2}{2} + \overline{C}$; $|1 - y| = e^{-\frac{x^2}{2} - \overline{C}}$; $|1 - y| = e^{-\overline{C}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$;

$1 - y = \underbrace{\pm e^{-\overline{C}}}_{C} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $y = 1 - C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $y(0) = 1 \Rightarrow C = 0$; $y = 1$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+2}$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+2}$; $\ln|y| = \ln|x + 2| + \overline{C}$; $\ln|y| - \ln|x + 2| = \overline{C}$; $\ln \frac{|y|}{|x+2|} = \overline{C}$;

$\ln\left|\frac{y}{x+2}\right| = \overline{C}$; $\left|\frac{y}{x+2}\right| = e^{\overline{C}}$; $\frac{y}{x+2} = \underbrace{\pm e^{\overline{C}}}_{C}$; $y = C \cdot (x + 2)$; $y(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$

4.7 **a)** $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$; $\int dy = -\int \frac{dx}{x^2}$; $y = \frac{1}{x} + C$

b) $\frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{x} = \frac{y}{2}$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; $\ln|y| = \sqrt{x} + \overline{C}$; $|y| = e^{\sqrt{x} + \overline{C}}$; $|y| = e^{\overline{C}} \cdot e^{\sqrt{x}}$;

$y = \underbrace{\pm e^{\overline{C}}}_{C} \cdot e^{\sqrt{x}}$; $y = C \cdot e^{\sqrt{x}}$

c) $\frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{x} = 2y + 1$; $\int \frac{dy}{2y+1} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $\frac{1}{2} \cdot \ln|2y + 1| = 2 \cdot \sqrt{x} + \overline{C}$; $\ln|2y + 1| = 4 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \overline{C}$;

$|2y + 1| = e^{4 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \overline{C}}$; $2y + 1 = \pm e^{4 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \overline{C}}$; $2y + 1 = \underbrace{\pm e^{2 \cdot \overline{C}}}_{C*} \cdot e^{4 \cdot \sqrt{x}}$; $y = \underbrace{\frac{C*}{2}}_{C} \cdot e^{4 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{2}$; $y = C \cdot e^{4 \cdot \sqrt{x}} - \frac{1}{2}$

d) $\frac{dy}{dx} = x \cdot (2y + 1)$; $\int \frac{dy}{2y+1} = \int x \cdot dx$; $\frac{1}{2} \cdot \ln|2y + 1| = \frac{1}{2} \cdot x^2 + \overline{C}$; $\ln|2y + 1| = x^2 + 2\overline{C}$;

$|2y + 1| = e^{x^2 + 2\overline{C}} = e^{x^2} \cdot e^{2\overline{C}}$; $2y + 1 = \underbrace{\pm e^{2\overline{C}}}_{C} \cdot e^{x^2}$; $y = \frac{1}{2} \cdot \left(C e^{x^2} - 1\right)$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2 \cdot \sqrt{1-x}}$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$; $\ln|y| = -\sqrt{1 - x} + \overline{C}$; $|y| = e^{-\sqrt{1-x} + \overline{C}} = e^{-\sqrt{1-x}} \cdot e^{\overline{C}}$;

$y = \underbrace{\pm e^{\overline{C}}}_{C} \cdot e^{-\sqrt{1-x}}$; $y = C \cdot e^{-\sqrt{1-x}}$

4.7 **f)** $\frac{dy}{dx} = -x \cdot y^2$; $\int \frac{dy}{y^2} = -\int x \cdot dx$; $-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + \overline{C}$; $y = \frac{2}{x^2 - 2\overline{C}} = \frac{2}{x^2 + C}$ mit $C = -2\overline{C}$

g) $\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x$; $\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x \cdot dx$; $-\frac{1}{y} = \sin x + \overline{C}$; $y = \frac{1}{-\overline{C} - \sin x} = \frac{1}{C - \sin x}$ mit $C = -\overline{C}$

h) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cdot \sin x}{\cos x}$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$; $\ln|y| = \ln|\cos x| + \overline{C}$; $\ln|y| - \ln|\cos x| = \overline{C}$;

$\ln \frac{|y|}{|\cos x|} = \overline{C}$; $\ln \left| \frac{y}{\cos x} \right| = \overline{C}$; $\left| \frac{y}{\cos x} \right| = e^{\overline{C}}$; $\frac{y}{\cos x} = \underbrace{\pm e^{\overline{C}}}_{C}$; $y = C \cdot \cos x$

i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sin x}$; $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\sin x}$; Integration des rechtsstehenden Integrals siehe die Integraltafel auf Seite 365, “Ingenieur–Mathematik 3”, oder wie folgt:

Substitution $u = \tan \frac{x}{2}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + u^2\right)$; $dx = \frac{2}{1+u^2} du$;

$$\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2u}{u^2 + 1};$$

$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{u^2+1}{2u} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + \overline{C} = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + \overline{C}$; damit ergibt sich aus der Differentialgleichung: $\ln|y| = -\ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + \overline{C}$; $\ln|y| + \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| = \overline{C}$; $\ln\left|y \cdot \tan \frac{x}{2}\right| = \overline{C}$;

$\left|y \cdot \tan \frac{x}{2}\right| = e^{\overline{C}}$; $y \cdot \tan \frac{x}{2} = \underbrace{\pm e^{\overline{C}}}_{C}$; $y = \frac{C}{\tan \frac{x}{2}}$

4.8 **a)** $\frac{dy}{dx} = -x \cdot y^2$; $\int \frac{dy}{y^2} = -\int x dx$; $-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + \overline{C}$; $y = \frac{2}{x^2 - 2\overline{C}} = \frac{2}{x^2 + C}$ mit $C = -2\overline{C}$;

$y(1) = 1 \Rightarrow C = 1$; $y = \frac{2}{x^2 + 1}$

b) $\frac{dy}{dx} = 1 - y$; $\int \frac{dy}{1-y} = \int dx$; $-\ln|1-y| = x + \overline{C}$; $\ln|1-y| = -x - \overline{C}$; $|1-y| = e^{-x-\overline{C}} = e^{-x} \cdot e^{-\overline{C}}$;

$1 - y = \underbrace{\pm e^{-\overline{C}}}_{C} \cdot e^{-x}$; $y = 1 - C \cdot e^{-x}$; $y(0) = 3 \Rightarrow C = -2$; $y = 1 + 2 \cdot e^{-x}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1+2x}}$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; $\ln|y| = \sqrt{1+2x} + \overline{C}$; $|y| = e^{\sqrt{1+2x} + \overline{C}} = e^{\sqrt{1+2x}} \cdot e^{\overline{C}}$;

$y = \underbrace{\pm e^{\overline{C}}}_{C} \cdot e^{\sqrt{1+2x}} = C \cdot e^{\sqrt{1+2x}}$; $y(0) = 1 \Rightarrow C = e^{-1}$; $y = e^{-1+\sqrt{1+2x}}$

d) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$; $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx$; $2 \cdot \sqrt{y} = x + C$; $\sqrt{y} = \frac{x+C}{2}$; $y = \frac{(x+C)^2}{4}$; $y(1) = 0 \Rightarrow C = -1$; $y = \frac{(x-1)^2}{4}$

e) $\frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $-\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$; $-\ln|y-1| = 2\sqrt{x} + \overline{C}$; $\ln|y-1| = -2\sqrt{x} - \overline{C}$; $|y-1| = e^{-2\sqrt{x} - \overline{C}}$;

$y - 1 = \underbrace{\pm e^{-\overline{C}}}_{C} \cdot e^{-2\sqrt{x}}$; $y = 1 + C \cdot e^{-2\sqrt{x}}$; $y(0) = 2 \Rightarrow C = 1$; $y = 1 + e^{-2\sqrt{x}}$

4.8 **f)** $-\frac{dy}{y-2}=\frac{dx}{\sqrt{2x}}$; $\frac{dy}{y-2}=-\frac{dx}{\sqrt{2x}}$; $\int\frac{dy}{y-2}=-\int\frac{dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}}$; $\ln|y-2|=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\sqrt{x}+\bar{C}$; $\ln|y-2|=-\sqrt{2x}+\bar{C}$;

$|y-2|=e^{-\sqrt{2x}+\bar{C}}$; $y-2=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-\sqrt{2x}}$; $y=2+C\cdot e^{-\sqrt{2x}}$; $y(0)=1\Rightarrow C=-1$; $y=2-e^{-\sqrt{2x}}$

g) $x\cdot\frac{dy}{dx}+x\cdot y=y$; $x\cdot\frac{dy}{dx}=y\cdot(1-x)$; $\int\frac{dy}{y}=\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx$; $\ln|y|=\ln|x|-x+\bar{C}$;

$\ln|y|-\ln|x|=-x+\bar{C}$; $\ln\frac{|y|}{|x|}=\ln\left|\frac{y}{x}\right|=-x+\bar{C}$; $\left|\frac{y}{x}\right|=e^{-x+\bar{C}}=e^{\bar{C}}\cdot e^{-x}$; $\frac{y}{x}=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-x}$; $y=C\cdot x\cdot e^{-x}$;

$y(1)=1\Rightarrow C=e$; $y=e\cdot x\cdot e^{-x}=x\cdot e^{1-x}$

h) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2y}{\sqrt{x}}$; $\int\frac{dy}{1-2y}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$; $-\frac{1}{2}\cdot\ln|2y-1|=2\cdot\sqrt{x}+\bar{C}$; $\ln|2y-1|=-4\cdot\sqrt{x}-2\bar{C}$;

$|2y-1|=e^{-4\cdot\sqrt{x}-2\bar{C}}=e^{-2\bar{C}}\cdot e^{-4\cdot\sqrt{x}}$; $2y-1=\underbrace{\pm e^{-2\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-4\cdot\sqrt{x}}$;

$2y-1=\underbrace{\pm e^{-2\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-4\cdot\sqrt{x}}$; $y=\frac{1}{2}\cdot\left(1+C\cdot e^{-4\cdot\sqrt{x}}\right)$; $y(0)=1\Rightarrow C=1$; $y=\frac{1}{2}\cdot\left(1+e^{-4\cdot\sqrt{x}}\right)$

4.9 $\frac{dN}{dt}=-\lambda\cdot N$; $\ln|N|=-\lambda\cdot t+\bar{C}$; da $N\geq 0$, ist $|N|=N$; $\ln N=-\lambda\cdot t+\bar{C}$; $N=\underbrace{e^{\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-\lambda\cdot t}$;

$N(t)=C\cdot e^{-\lambda\cdot t}$; $N(0)=N_0\Rightarrow C=N_0$; $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$

4.10 Nach 4.9 gilt $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$. Nach t 5730 Jahren, ist die Hälfte der anfänglich vorliegenden Kernanzahl N_0 zerfallen: $\frac{N_0}{2}=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot 5730}$; $\frac{1}{2}=e^{-\lambda\cdot 5730}$; $\ln\frac{1}{2}=\ln e^{-\lambda\cdot 5730}$; $-\ln 2=-\lambda\cdot 5730$;

$\lambda=1{,}2097$; $N(8000)=N_0\cdot e^{-1{,}2097\cdot 8000}\approx 0{,}380$; der Anteil $\frac{N(8000)}{N_0}$ der noch nicht zerfallenen C14-Kerne ist daher gleich 38,0% des C14-Gehaltes der Luft zum Todeszeitpunkt.

4.11 **a)** $\frac{dp}{dh}=-k\cdot p$; $\ln|p|=-k\cdot h+\bar{C}$; da $p\geq 0$, ist $|p|=p$; $\ln p=-k\cdot h+\bar{C}$; $p=e^{-k\cdot h+\bar{C}}=\underbrace{e^{\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-k\cdot h}=C\cdot e^{-k\cdot h}$

$p(0)=1013\Rightarrow C=1013$; $k=1{,}252\cdot 10^{-4}\text{ m}^{-1}=0{,}1252\text{ km}^{-1}=\frac{1}{7{,}99\text{ km}}$;

$p(h)=1013\text{ mbar}\cdot e^{-h/7{,}99\text{ km}}$

b) $\frac{1}{2}\cdot p(0)=p(0)\cdot e^{-h/7{,}99\text{km}}$; $\frac{1}{2}=e^{-h/7{,}99\text{km}}$; $-\ln 2=-\frac{h}{7{,}99}$; $h=h_{1/2}=7{,}99\cdot\ln 2=5{,}54\text{km}$ Halbwertshöhe

c) $0{,}4\cdot p(0)=p(0)\cdot e^{-h/7{,}99\text{km}}$; $0{,}4=e^{-h/7{,}99\text{km}}$; $\ln 0{,}4=-\frac{h}{7{,}99}$; $h=-7{,}99\cdot\ln 0{,}4=7{,}32$ km

d) h = 3 km: barometrisch: p = 696 mbar, international: p = 701 mbar
h = 8 km: barometrisch: p = 372 mbar, international: p = 356 mbar

4.12 **a)** $\frac{dv}{dt}=-k\cdot v$ mit $k=\frac{b}{m}$; $\int\frac{dv}{v}=\int(-k)\cdot dt$; $\ln|v|=-k\cdot t+C$; da $v\geq 0$ angenommen werden kann, ist $|v|=v$; $\ln v=-k\cdot t+\bar{C}$; $v=e^{-k\cdot t+\bar{C}}=\underbrace{e^{\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-k\cdot t}$; $v=C\cdot e^{-k\cdot t}$; $v(0)=v_0\Rightarrow C=v_0$;

$v(t)=v_0\cdot e^{-k\cdot t}$ mit $v_0=20$ km/h, exponentielle Abnahme der Bootsgeschwindigkeit

b) $v(10)=12=20\cdot e^{-k\cdot 10}$; $0{,}6=e^{-k\cdot 10}$; $\ln 0{,}6=-k\cdot 10$; $k=-\frac{\ln 0{,}6}{10}=0{,}0511\text{ s}^{-1}$

4.12 **c)** $v=\dfrac{ds}{dt}$; Weg von $t = 0$ s bis $t = t_0 = 60$ s: $s=\int\limits_0^{t_0} v\cdot dt=\int\limits_0^{t_0} 20\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}\cdot e^{-0{,}0511\cdot t}\,dt=\dfrac{20}{3{,}6}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\int\limits_0^{t_0} e^{-0{,}0511\cdot t}\,dt$;

Weg in erster Minute: $\int\limits_0^{60}\dfrac{20}{3{,}6}\cdot e^{-k\cdot t}\,dt\approx 103{,}7$ m; Weg in zweiter Minute: $\int\limits_{60}^{120}\dfrac{20}{3{,}6}\,e^{-kt}\,dt\approx 4{,}8$ m;

4.13 **a)** $V(t)=\pi\cdot R^2\cdot h(t)$; $\dfrac{dV}{dt}=\pi\cdot R^2\,\dfrac{dh}{dt}=-\mu\cdot\pi\cdot r^2\cdot\sqrt{2gh}$;

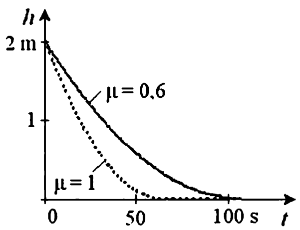
$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\pi\cdot R^2}\cdot\left(-\mu\cdot\pi\cdot r^2\cdot\sqrt{2gh}\right)=-\mu\cdot\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh}=-0{,}6\cdot\frac{0{,}01}{1}\sqrt{2gh}=-0{,}006\cdot\sqrt{2g}\cdot\sqrt{h}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}}=-0{,}006\cdot\sqrt{2g}\cdot dt;\quad 2\sqrt{h}=-0{,}006\cdot\sqrt{2g}\cdot t+\overline{C};\quad \sqrt{h}=-0{,}003\cdot t\cdot\sqrt{2g}+\underbrace{\frac{\overline{C}}{2}}_{C};$$

$$h=\left(-0{,}003\cdot t\cdot\sqrt{2g}+C\right)^2;\quad h(t=0)=C^2=H\ \Rightarrow\ C=\sqrt{H}=\sqrt{2};$$

$$h(t)=\left(-0{,}003\cdot t\cdot\sqrt{2g}+\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}-0{,}003\cdot t\cdot\sqrt{2g}\right)^2=2\cdot\left(1-0{,}003\cdot t\cdot\sqrt{g}\right)^2;$$

b)



c) $g\approx 9{,}81$; $h(t)=2\cdot\left(1-0{,}003\cdot\sqrt{g}\cdot t\right)^2=0\ \Rightarrow\ t=106$ s.

Anmerkung: Im Idealfall des reibungsfreien Ausflusses ist $\mu=1$. In diesem Fall würde gelten:
$h(t)=2\cdot\left(1-0{,}005\cdot\sqrt{g}\cdot t\right)^2=0\ \Rightarrow\ t\approx 64$ s

4.14 *Vorbemerkung*: Der 1000 *l* fassende, ursprünglich mit reinem Wasser gefüllte Behälter kann schließlich höchstens 20 g Salz pro Liter enthalten; das sind insgesamt 1000·20 g = 20 kg Salz.

$dm=5\cdot 0{,}02\cdot dt-5\cdot\dfrac{m}{1000}\,dt$; $\quad dm=\left(0{,}1-0{,}005\,m\right)dt$; $\quad 200\,dm=(20-m)\,dt$;

$200\cdot\displaystyle\int\frac{dm}{20-m}=\int dt$; $\quad -200\cdot\ln|20-m|=t+\overline{C}$; da $m\le 20$, gilt $20-m\ge 0$ und daher

$|20-m|=20-m$ $\quad -200\cdot\ln(20-m)=t+\overline{C}$; $\quad \ln(20-m)=-\dfrac{1}{200}\cdot\left(t+\overline{C}\right)$; $\quad 20-m=e^{-t/200-\overline{C}/200}$;

$m=20-\underbrace{e^{-\overline{C}/200}}_{C}\cdot e^{-t/200}=20-C\cdot e^{-0{,}005\cdot t}$; $\quad m(0)=0\ \Rightarrow\ C=20$; $\quad m(t)=20\cdot\left(1-e^{-0{,}005\cdot t}\right)$

4.15 $m\dfrac{dv}{dt}=m\cdot g-k\,v^2$; $\quad 90\dfrac{dv}{dt}=90\cdot 10-36\,v^2$; $\quad \dfrac{dv}{dt}=10-\dfrac{36}{90}\,v^2=10\cdot\left(1-\dfrac{v^2}{25}\right)$; da v anfänglich 10 m/s, ist $10\cdot\left(1-\dfrac{v^2}{25}\right)<0$; d.h. $\dfrac{dv}{dt}<0$, v nimmt ab, bleibt aber wegen $1-v^2/25<0$ oder $v^2>25$ größer als 5 m/s. Im Grenzfall kann $\dfrac{dv}{dt}=10\cdot\left(1-\dfrac{v^2}{25}\right)=0$ sein; dann ist $v = 5$ m/s.

$25\cdot\displaystyle\int\frac{dv}{25-v^2}=10\,dt$; $\quad -25\cdot\displaystyle\int\frac{dv}{v^2-25}=10\,dt$; $\quad \displaystyle\int\frac{dv}{(v+5)\cdot(v-5)}=-\frac{2}{5}\cdot t+\overline{C}$; da

$\dfrac{1}{(v+5)\cdot(v-5)}=-\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{v+5}+\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{v-5}$ (Partialbruchzerl.): $\;-\dfrac{1}{10}\cdot\ln|v+5|+\dfrac{1}{10}\cdot\ln|v-5|=-\dfrac{2}{5}\cdot t+\overline{C}$; die Betragsstriche können weggelassen werden, da v+5 und v–5 positiv sind. Integration links auch mit Hilfe der Integraltafel in „Ingenieur–Math. 3“, Seite 364, Nummer 5: a = c = 1, b = 5, d = –5.

4.15 Forts. $\ln\frac{v-5}{v+5} = -4t + \underbrace{10\cdot\overline{C}}_{C^*} = -4t + C^*$; $\frac{v-5}{v+5} = e^{-4t}\cdot\underbrace{e^{C^*}}_{C}$;

Berücksichtigt man hier die Anfangsbedingung $v(0) = 10$, so folgt $\frac{10-5}{10+5} = C$; also $C = \frac{1}{3}$; $\frac{v-5}{v+5} = \frac{1}{3}\cdot e^{-4t}$.

Auflösen nach v führt auf $v(t) = 5\,\frac{m}{s}\cdot\frac{3+e^{-4t}}{3-e^{-4t}}$;

Grenzgeschwindigkeit $v_S = \lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 5\,\frac{m}{s}$.

TI-nspire (Voyage 200):

$$\text{deSolve}(90\cdot v' = 90\cdot 10 - 36\cdot v^2 \text{ and } v(0)=10, t, v) \quad \frac{\ln(3\cdot(v-5))}{10} - \frac{\ln(v+5)}{10} = \frac{-2\cdot t}{5}$$

$$\left(\frac{\ln(3\cdot(v-5))}{10} - \frac{\ln(v+5)}{10} = \frac{-2\cdot t}{5}\right)\cdot 10 \quad -(\ln(v+5)-\ln(3\cdot(v-5))) = -4\cdot t$$

$$e^{-(\ln(v+5)-\ln(3\cdot(v-5)))} = e^{-4\cdot t} \quad \frac{3\cdot(v-5)}{v+5} = e^{-4\cdot t}$$

$$\text{solve}\left(\frac{3\cdot(v-5)}{v+5} = e^{-4\cdot t}, v\right) \quad v = \frac{5\cdot(3\cdot e^{4\cdot t}+1)}{3\cdot e^{4\cdot t}-1}$$

4.16 *Ohne Fallschirm*: $m\frac{dv}{dt} = m\cdot g - k\,v^2$ mit $v(0) = 0$; $90\frac{dv}{dt} = 90\cdot 10 - 0{,}045\,v^2$;

$\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{0{,}045}{90}v^2 = 10\cdot\left(1-\frac{v^2}{20000}\right)$; $20000\cdot\int\frac{dv}{20000-v^2} = \int 10\,dt$; $-20000\cdot\int\frac{dv}{v^2-20000} = \int 10\,dt$;

$\int\frac{dv}{(v+100\cdot\sqrt{2})\cdot(v-100\cdot\sqrt{2})} = -\frac{1}{2000}\cdot t + \overline{C}$; die Integration links kann mit Hilfe der Integraltafel in „Ingenieur–Mathematik 3“, Seite 364, Nummer 5, erfolgen: $a = c = 1$, $b = 100\sqrt{2}$, $d = -100\sqrt{2}$;

$-\frac{1}{200\cdot\sqrt{2}}\cdot\ln\left|\frac{v+100\sqrt{2}}{v-100\cdot\sqrt{2}}\right| = -\frac{1}{2000}\cdot t + \overline{C}$; $-\frac{1}{200\cdot\sqrt{2}}\cdot\ln\frac{|v+100\sqrt{2}|}{|v-100\cdot\sqrt{2}|} = -\frac{1}{2000}\cdot t + \overline{C}$;

$|v+100\sqrt{2}| = v + 100\sqrt{2}$; $|v-100\sqrt{2}| = 100\sqrt{2} - v$, da $v < 100\sqrt{2}$.

$\ln\frac{100\sqrt{2}+v}{100\sqrt{2}-v} = \frac{\sqrt{2}}{10}t\,\underbrace{-200\cdot\sqrt{2}\cdot\overline{C}}_{C}$; $\ln\frac{100\sqrt{2}+v}{100\sqrt{2}-v} = \frac{\sqrt{2}}{10}t + C$; $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$; $\ln\frac{100\sqrt{2}+v}{100\sqrt{2}-v} = \frac{\sqrt{2}}{10}t$.

Entlogarithmieren und anschließendes Auflösen nach v führt auf

$v(t) = 100\sqrt{2}\cdot\frac{1-e^{-t\sqrt{2}/10}}{1+e^{-t\sqrt{2}/10}}$; $v(5) \approx 48{,}0$ m/s.

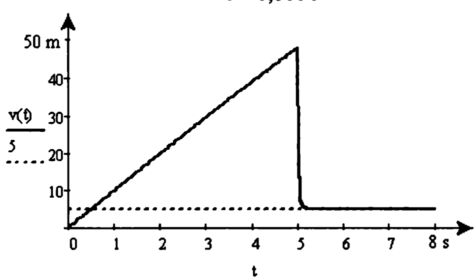
Mit Fallschirm: Wir beginnen die Zeitzählung einfachheitshalber neu und setzen den Zeitpunkt, in dem sich der Fallschirm öffnet, wieder gleich $t = 0$ s: $\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{36}{90}v^2$, $v(0) = 48{,}0\,\frac{m}{s}$;

$\ln\frac{v-5}{v+5} = -4t + C^*$ wie in Aufgabe 4.15; $\frac{v-5}{v+5} = e^{-4t}\cdot\underbrace{e^{C^*}}_{C}$; $v(0) = 48{,}0 \Rightarrow C = 0{,}209$.

Entlogarithmieren und anschließendes Auflösen nach v führt auf $v(t) = 5\cdot\frac{1+0{,}811\cdot e^{-4t}}{1-0{,}811\cdot e^{-4t}}$.

Zusammenführung beider Ergebnisse: t ist wieder die Zeit nach dem Absprung.

$$v(t) = \begin{cases} 100\sqrt{2}\cdot\frac{1-e^{-t\sqrt{2}/10}}{1+e^{-t\sqrt{2}/10}} & \text{für } t \le 5\text{ s} \\ 5\cdot\frac{1+0{,}811\cdot e^{-4(t-5)}}{1-0{,}811\cdot e^{-4(t-5)}} & \text{für } t > 5\text{ s} \end{cases}$$



Ein plötzlicher (unstetiger) Übergang von k = 0,045 auf k = 36 ist natürlich unrealistisch und war eine sehr vereinfachende Modellannahme. k ist als stetige Zeitfunktion anzusetzen, was allerdings die Lösung der Differentialgleichung erschwert.

4.17 **a)** $m\cdot\frac{dv}{dt}=-m\cdot g-k\cdot v^2$; $0{,}18\cdot\frac{dv}{dt}=-0{,}18\cdot 10-0{,}002\cdot v^2$; $90\cdot\frac{dv}{dt}=-900-v^2$; $-\int\frac{90\cdot dv}{v^2+900}=\int dt$;

$-3\cdot\arctan\frac{v}{30}=t+\overline{C}$; $\arctan\frac{v}{30}=-\frac{1}{3}\cdot t\underbrace{-\frac{1}{3}\cdot\overline{C}}_{C}$; $\arctan\frac{v}{30}=-\frac{1}{3}\cdot t+C$;

$v(0)=30 \Rightarrow \arctan 1=\frac{\pi}{4}=C$; $\arctan\frac{v}{30}=-\frac{1}{3}\cdot t+\frac{\pi}{4}$ oder $v=30\frac{m}{s}\cdot\tan\left(-\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.

Zum Vergleich ohne Luftwiderstand: $v=v_0-g\cdot t=30\frac{m}{s}-10\frac{m}{s^2}\cdot t$.

Anmerkung: Ist die Ableitung einer Funktion positiv/negativ, so wächst/fällt die Funktion. Beim senkrechten Wurf nach oben wirken sowohl die Gewichtskraft als auch die Reibungskraft geschwindigkeitsvermindernd. Daher müssen beide Kräfte negativ angesetzt werden. Dagegen wirkt beim senkrechten Wurf nach unten die Gewichtskraft geschwindigkeitssteigernd, die Reibungskraft aber wieder geschwindigkeitsvermindernd. Beispiel für einen senkrechten Wurf nach unten (ganz wie Aufgabe 4.15): $m\cdot\frac{dv}{dt}=m\cdot g-k\cdot v^2$;

$0{,}18\cdot\frac{dv}{dt}=0{,}18\cdot 10-0{,}002\cdot v^2$; mit der Anfangsbedingung $v(0)=0$ würde die Lösung lauten: $v=30\cdot\tanh\frac{t}{3}$.

Zum Vergleich ohne Luftwiderstand: $v=10\cdot t$

b) $v=0$ für $-\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}=0 \Rightarrow t=t_0=\frac{3\pi}{4}\approx 2{,}36\text{s}$. Zum Vergl. ohne Luftwiderst.: $t_0=v_0/g=3\text{ s}$

c) $s_{max}=\int_0^{t_0}v\,dt=\int_0^{t_0}30\tan\left(-\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)dt=30\cdot\int_0^{t_0}\frac{\sin(-t/3+\pi/4)}{\cos(-t/3+\pi/4)}\,dt$; Substitution $u=\cos(-t/3+\pi/4)$;

$$30\cdot\int_{\dots}^{\dots}\frac{\sin(-t/3+\pi/4)}{u}\cdot\frac{3\cdot du}{\sin(-t/3+\pi/4)}=90\cdot\ln\left[\cos\left(-\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{3\pi/4}=90\cdot\left[\ln\cos 0-\ln\cos\frac{\pi}{4}\right]=$$

$=-90\cdot\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 31{,}2\text{ m}$. Zum Vergleich ohne Luftwiderstand: $s_{max}=v_0\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t_0^2\approx 42{,}9\text{ m}$

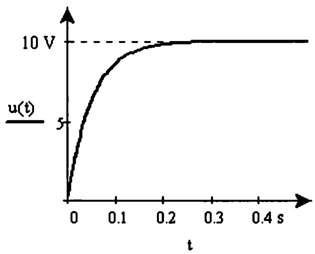
4.18 $RC\cdot\frac{du_c}{dt}+u_c=U_0$; $\int\frac{du_c}{U_0-u_c}=\int\frac{dt}{RC}$; $-\ln|U_0-u_c|=\frac{t}{RC}+\overline{K}$; $\ln|U_0-u_c|=-\frac{t}{RC}-\overline{K}$;

die Integrationskonstante wird mit $\overline{K}$ bzw. später mit K bezeichnet, um eine Verwechslung mit der Kapazität C auszuschließen. Da die Kondensatorspannung u_C nicht größer als U_0 ein kann, kann sofort $|U_0-u_C|=U_0-u_C$ geschrieben werden. Entlogarithmieren:

$U_0-u_C=e^{-\frac{t}{RC}-\overline{K}}=\underbrace{e^{-\overline{K}}}_{K}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$; $u_c=U_0-K\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$;

$u_c=U_0-K\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$; $u_C(0)=0 \Rightarrow K=U_0$;

$u_c=U_0\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)=10\text{ V}\cdot\left(1-e^{-20\text{ s}^{-1}\cdot t}\right)$



4.19 $\frac{dN}{dt}=0{,}002\cdot N\cdot(200-N)$; positive Ableitung $\frac{dN}{dt}$ (d.h. die Filialzahl wächst) bedeutet, dass das Produkt $0{,}002\cdot N\cdot(200-N)$ positiv sein muss. D.h. aber, es muss $200-N$ positiv sein.

$-\int\frac{dN}{N\cdot(N-200)}=0{,}002\cdot\int dt$; $\int\frac{dN}{N\cdot(N-200)}=-0{,}002\cdot\int dt$; Integration mit Hilfe der Integraltafel, "Ingenieuer–Mathematik 3", Seite 364, Nummer 4. Oder durch Partialbruchzerlegung:

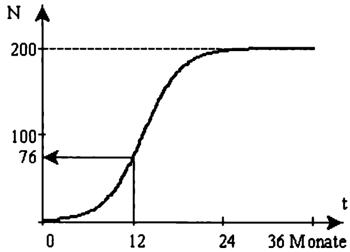
$\frac{1}{N\cdot(N-200)}=\frac{A}{N}+\frac{B}{N-200} \Rightarrow A=-\frac{1}{200}$; $B=+\frac{1}{200}$; $\int\left(-\frac{1}{200}\cdot\frac{1}{N}+\frac{1}{200}\cdot\frac{1}{N-200}\right)dN=-0{,}002\cdot t+\overline{C}$;

4.19 Forts.
$-\ln|N| + \ln|N-200| = -200 \cdot 0{,}002 \cdot t + 200 \cdot \bar{C}$; da $N \geq 0$, ist $|N| = N$; da $N - 200 < 0$, ist $|N - 200| = 200 - N$;

$-\ln N + \ln(200 - N) = -200 \cdot 0{,}002 \cdot t + \underbrace{200 \cdot \bar{C}}_{C^*}$;

$\ln\frac{200-N}{N} = -0{,}4 \cdot t + C^*$; $\frac{200-N}{N} = e^{-0{,}4 \cdot t + C^*} = \underbrace{e^{C^*}}_{C} \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}$;

daraus $N = \frac{200}{1+C \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}}$; $N(0) = 1 \Rightarrow C = 199$;



$N(t) = \frac{200}{1+199 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}}$; $N(12) \approx 76$ Filialen. N stets kleiner als 200 (= "Sättigungsgrenze")

4.20 $\frac{dN}{dt} = 5 \cdot 10^{-7} \cdot N \cdot (10^5 - N)$; ein Anwachsen von N bedingt, dass die Ableitung $\frac{dN}{dt}$ positiv sein muss; daher muss das Produkt $5 \cdot 10^{-7} \cdot N \cdot (10^5 - N)$ positiv sein und damit folglich $10^5 - N > 0$.

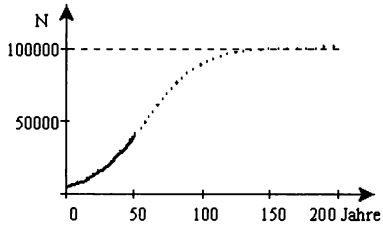
$\int \frac{dN}{N \cdot (N - 10^5)} = -5 \cdot 10^{-7} \cdot dt$; Integration mit Hilfe der Integraltafel, "Ingenieur–Mathematik 3", Seite 364, Nummer 4. Oder durch Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{N \cdot (N-10^5)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{N-10^5} \Rightarrow$

$A = -\frac{1}{10^5}$; $B = +\frac{1}{10^5}$; $\int\left(-\frac{1}{10^5} \cdot \frac{1}{N} + \frac{1}{10^5} \cdot \frac{1}{N-10^5}\right) dN = -5 \cdot 10^{-7} \cdot t + \bar{C}$;

$-\ln|N| + \ln|N - 10^5| = -5 \cdot 10^{-2} \cdot t + 10^5 \cdot \bar{C}$; da $N \geq 0$, ist $|N| = N$; da $N - 10^5 < 0$, ist $|N - 10^5| = 10^5 - N$;

$-\ln N + \ln(10^5 - N) = -0{,}05 \cdot t + \underbrace{10^5 \cdot \bar{C}}_{C^*}$;

$\ln\frac{10^5-N}{N} = -0{,}05 \cdot t + C^*$; $\frac{10^5-N}{N} = e^{-0{,}05 \cdot t + C^*} = \underbrace{e^{C^*}}_{C} \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$;



daraus $N = \frac{10^5}{1+C \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}}$; $N(0) = 5000 \Rightarrow N = 19$; $N(t) = \frac{10^5}{1+19 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}}$;

$1{,}25 \cdot 5000 = \frac{10^5}{1+19 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}} \Rightarrow t \approx 4{,}7$ Jahre ; N stets kleiner als 10^5 (= "Sättigungsgrenze")

4.21 **a)** nicht linear wegen des Gliedes y^2 **b)** linear
c) linear **d)** nicht linear wegen des Gliedes $y \cdot y'$

4.22 **a)** (1) Allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' = y$ durch Trennung der Variablen:
(4.56)

$\frac{dy}{dx} = y$; $\frac{dy}{y} = dx$; $\int\frac{dy}{y} = \int dx$; $\ln|y| = x + \bar{C}$; $|y| = e^x \cdot e^{\bar{C}}$; $y = y_h = \underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C} \cdot e^x = C \cdot e^x$

(2) Nun allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = y + x$ durch Variation der Konstanten C der homogenen Lösung y_h, C geschrieben in der Form K(x),:

$y = K(x) \cdot e^x$; $y' = K'(x) \cdot e^x + K(x) \cdot e^x$; Einsetzen in die inhomogene Gleichung:

$K'(x) \cdot e^x + K(x) \cdot e^x = K(x) \cdot e^x + x \Rightarrow K'(x) = x \cdot e^{-x}$; partielle Integration:

$K(x) = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx = -(x+1) \cdot e^{-x} + C$; $y = [-(x+1) \cdot e^{-x} + C] \cdot e^x = C \cdot e^x - x - 1$

4.22 b) (1) Homog. Gleichung: $\frac{dy}{dx}+x\cdot y=0;\quad \frac{dy}{dx}=-x\cdot y;\quad \frac{dy}{y}=-x\cdot dx;\quad \int\frac{dy}{y}=-\int x\,dx;$

$\ln|y|=-\frac{1}{2}\cdot x^2+\bar{C};\quad |y|=e^{-x^2/2}\cdot e^{\bar{C}};\quad y=y_h=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-x^2/2}=C\cdot e^{-x^2/2};$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=K(x)\cdot e^{-x^2/2};$

$K'\cdot e^{-x^2/2}+K\cdot e^{-x^2/2}\cdot(-x)+x\cdot K\cdot e^{-x^2/2}=2x;\quad K'\cdot e^{-x^2/2}=2x;\quad K=2\cdot\int x\,e^{x^2/2}\,dx;$

x ist die innere Ableitung von $e^{x^2/2}$ $\Rightarrow$ $K(x)=2e^{x^2/2}+C;$

$y=K(x)\cdot e^{-x^2/2}=\left[2e^{x^2/2}+C\right]\cdot e^{-x^2/2}=2+C\cdot e^{-x^2/2}$

c) (1) Homog. Gleichung: $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0;\quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x};\quad \ln|y|=\ln|x|+\bar{C};\quad \ln|y|-\ln|x|=\bar{C};$

$\ln\frac{|y|}{|x|}=\bar{C};\quad \ln\left|\frac{y}{x}\right|=\bar{C};\quad \left|\frac{y}{x}\right|=e^{\bar{C}};\quad \frac{y}{x}=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C};\quad y=y_h=C\cdot x$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=K(x)\cdot x;$

$K'\cdot x+K\cdot 1-\frac{K\cdot x}{x}=1;\quad K'=\frac{1}{x};\quad K(x)=\ln|x|+C;\quad y=\left[\ln|x|+C\right]\cdot x$

d) (1) Homog. Gleichung: $x\cdot\frac{dy}{dx}+y=0;\quad \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x};\quad \ln|y|=-\ln|x|+\bar{C};$

$\ln|y|+\ln|x|=\bar{C};\quad \ln(|x|\cdot|y|)=\bar{C};\quad \ln|x\cdot y|=\bar{C};\quad |x\cdot y|=e^{\bar{C}};\quad x\cdot y=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C};\quad y=y_h=\frac{C}{x}$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=\frac{K(x)}{x};$

$y'=\frac{K'\cdot x-K}{x^2};\quad x\cdot\frac{K'\cdot x-K}{x^2}+\frac{K}{x}-2x=0;\quad K'=2x;\quad K(x)=x^2+C;$

$y=K(x)\cdot x=\left(x^2+C\right)\cdot\frac{1}{x}=x+\frac{C}{x}$

e) (1) Homog. Gleichung: $\frac{dy}{dx}+\frac{1-y}{1-x}=0;\quad \int\frac{dy}{y-1}=-\int\frac{dx}{x-1};\quad \ln|y-1|=-\ln|x-1|+\bar{C};$

$\ln|(y-1)\cdot(x-1)|=\bar{C};\quad |(y-1)\cdot(x-1)|=e^{\bar{C}};\quad (y-1)\cdot(x-1)=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C};\quad y=y_h=1+\frac{C}{x-1}$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=1+\frac{K(x)}{x-1};$

$y'=\frac{K'\cdot(x-1)-K\cdot 1}{(x-1)^2};\quad \frac{K'\cdot(x-1)-K\cdot 1}{(x-1)^2}+\frac{1-[1+K/(x-1)]}{1-x}=2;\quad \frac{K'}{x-1}=2;\quad K'=2x-2;\quad K(x)=x^2-2x+C^*;$

$y=1+\frac{x^2-2x+C^*}{x-1}=\frac{x-1+x^2-2x+C^*}{x-1}=\frac{x\cdot(x-1)+C^*-1}{x-1}=x+\frac{C}{x-1}$ mit $C=C^*-1$

f) (1) Homog. Gl.: $2x\cdot\frac{dy}{dx}+y=0;\quad 2\cdot\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x};\quad 2\cdot\ln|y|=-\ln|x|+\bar{C};\quad \ln|y|^2=-\ln|x|+\bar{C};$

$\ln|y|^2+\ln|x|=\bar{C};\quad \ln\left|x\cdot y^2\right|=\bar{C};\quad \left|x\cdot y^2\right|=e^{\bar{C}};\quad x\cdot y^2=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C^*};\quad y=y_H=\frac{\pm\sqrt{C^*}}{\sqrt{x}}=\frac{C}{\sqrt{x}}$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=\frac{K(x)}{\sqrt{x}};$

$y'=\frac{K'\cdot\sqrt{x}-\frac{K}{2\cdot\sqrt{x}}}{x}=\frac{2K'\cdot x-K}{2x\cdot\sqrt{x}};\quad 2x\cdot\frac{2K'\cdot x-K}{2x\cdot\sqrt{x}}+\frac{K}{\sqrt{x}}=10x^2;\quad K'=5x\cdot\sqrt{x}=5\cdot x^{3/2};$

$K(x)=2x^2\cdot\sqrt{x}+C;\quad y=\frac{2x^2\cdot\sqrt{x}+C}{\sqrt{x}}=2x^2+\frac{C}{\sqrt{x}}$

4.23 **a)** (1) Homog. Gleichung: $\frac{dy}{dx}+x\cdot y=0;\quad \int\frac{dy}{y}=-\int x\,dx;\quad \ln|y|=-\frac{x^2}{2}+\bar{C};\quad |y|=e^{-x^2/2}\cdot e^{\bar{C}};$

$y=y_h=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-x^2/2}=C\cdot e^{-x^2/2}$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=K(x)\cdot e^{-x^2/2}$;

$y'=K'\cdot e^{-x^2/2}+K\cdot e^{-x^2/2}\cdot(-x);\quad K'\cdot e^{-x^2/2}-K\cdot x\cdot e^{-x^2/2}+x\cdot K\cdot e^{-x^2/2}=x;$

$K'=x\cdot e^{x^2/2};\quad K(x)=e^{x^2/2}+C;$

allgemeine Lösung der inhom. Gleichung: $y=\left(e^{x^2/2}+C\right)\cdot e^{-x^2/2}=1+C\cdot e^{-x^2/2};$

Berücksichtigung der Anf. bed.: $y(2)=1+C\cdot e^{-2}=2 \Rightarrow C=e^2;\quad y=1+e^{2-x^2/2}$

b) (1) Homog. Gleichung: $2x\cdot\frac{dy}{dx}+y=0;\quad \int\frac{dy}{y}=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x};\quad \ln|y|=-\frac{1}{2}\cdot\left(\ln|x|+\bar{C}\right);$

$2\cdot\ln|y|+\ln|x|=-\bar{C};\quad \ln\left|x\cdot y^2\right|=-\bar{C};\quad \left|x\cdot y^2\right|=e^{-\bar{C}};\ x\cdot y^2=\underbrace{\pm e^{-\bar{C}}}_{C^*};\ y=y_h=\frac{\pm\sqrt{C^*}}{\sqrt{x}}=\frac{C}{\sqrt{x}}$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=\frac{K(x)}{\sqrt{x}}$;

$y'=\frac{K'\cdot\sqrt{x}-\frac{K}{2\cdot\sqrt{x}}}{x}=\frac{2K'\cdot x-K}{2x\cdot\sqrt{x}};\ 2x\cdot\frac{2K'\cdot x-K}{2x\cdot\sqrt{x}}+\frac{K}{\sqrt{x}}=6x;\quad K'=3\cdot\sqrt{x};$

$K(x)=2x\cdot\sqrt{x}+C$; allg. Lösung d. inhom. Gl.: $y=\frac{2x\cdot\sqrt{x}+C}{\sqrt{x}}=2x+\frac{C}{\sqrt{x}}$;

Berücksichtigung der Anf. bed.: $y(2)=4+\frac{C}{\sqrt{2}}=5 \Rightarrow C=\sqrt{2};\quad y=2x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}=2x+\sqrt{\frac{2}{x}}$

c) (1) Homog. Gleichung: $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=0;\quad \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x+1};\quad \ln|y|=-\ln|x+1|+\bar{C};$

$\ln|y|+\ln|x+1|=\bar{C};\quad \ln|y\cdot(x+1)|=\bar{C};\quad |y\cdot(x+1)|=e^{\bar{C}};\ y\cdot(x+1)=\underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C};\quad y=y_h=\frac{C}{x+1}$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=\frac{K(x)}{x+1}$;

$y'=\frac{K'\cdot(x+1)-K}{(x+1)^2};\quad \frac{K'\cdot(x+1)-K}{(x+1)^2}+\frac{K}{(x+1)^2}=2;\quad K'=2\cdot(x+1);\quad K(x)=x^2+2x+C;$

allg. Lösung d. inhom. Gl.: $y=\frac{x^2+2x+C}{x+1};$

Berücksichtigung der Anf. bed.: $y(3)=\frac{3^2+2\cdot3+C}{3+1}=4 \Rightarrow C=1;\quad y=\frac{x^2+2x+1}{x+1}=x+1$

d) (1) Homog. Gleichung: $\frac{dy}{dx}+2xy=0;\quad \int\frac{dy}{y}=-2\int x\,dx;\quad \ln|y|=-2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+\bar{C}\right)=-x^2-2\bar{C};$

$|y|=e^{-x^2}\cdot e^{-2\bar{C}};\ y=\underbrace{\pm e^{-2\bar{C}}}_{C}e^{-x^2};\quad y=y_h=C\cdot e^{-x^2}$

(2) Var. der Konstanten C in y_h und Einsetzen in die inhom. Gleichung: $y=K(x)\cdot e^{-x^2};$

$y'=K'\cdot e^{-x^2}+K\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x);\quad K'\cdot e^{-x^2}-2x\cdot K\cdot e^{-x^2}+2x\cdot K\cdot e^{-x^2}=2x\cdot e^{-x^2};$

$K'=2x;\quad K(x)=x^2+C$; allg. Lösung d. inhom. Gl.: $y=\left(x^2+C\right)\cdot e^{-x^2}$;

Berücksichtigung der Anf. bed.: $y(0)=(0+C)\cdot1=1 \Rightarrow C=1;\quad y=\left(x^2+1\right)\cdot e^{-x^2}$

4.24 **a)** (1) $y'+2y=0;\quad \int\frac{dy}{y}=-2\cdot\int dx;\ \ln|y|=-2\cdot\left(x+\bar{C}\right);\ y=\underbrace{\pm e^{-2\bar{C}}}_{C}\cdot e^{-2x};\ y=y_h=C\cdot e^{-2x}.$

Einfacher wegen des konstanten Koeffizienten $p = 2$ durch Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x}$;
$y_h'=C\cdot\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x};\ C\cdot\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x}+2\cdot Ce^{\lambda\cdot x}=Ce^{\lambda\cdot x}\cdot(\lambda+2)=0\ \Rightarrow\ \lambda=-2;\quad y_h=Ce^{-2\cdot x}$

(2) $y_p = a;\ \ y_p' = 0;\ \ 0 + 2a = 6\ \Rightarrow\ a = 3;\ y_p = 3$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-2x} + 3$

b) (1) $y'+3y=0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x}$; $y_h'=C\cdot\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x}$;
$C\cdot\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x}+3\cdot Ce^{\lambda\cdot x}=Ce^{\lambda\cdot x}\cdot(\lambda+3)=0\ \Rightarrow\ \lambda=-3;\quad y_h=Ce^{-3\cdot x}$

(2) $y_p = a\cdot x + b;\ \ y_p' = a;\ \ a + 3a\cdot x + 3b = x\ \Rightarrow\ a + 3b = 0$ und $3a = 1$;
$a=\frac{1}{3};\ b=-\frac{1}{9};\ \ y_p=\frac{1}{3}\cdot x-\frac{1}{9}$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y=y_h+y_p=C\cdot e^{-3x}+\frac{1}{3}\cdot x-\frac{1}{9}$

c) (1) $y' + 2y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x}\ \Rightarrow\ y_h = C\cdot e^{-2x}$

(2) $y_p = a\cdot x + b;\ \ y_p'= a;\ \ a + 2a\cdot x + 2b = x - 1\ \Rightarrow\ a + 2b = -1$ und $2a = 1$;
$a=\frac{1}{2};\ b=-\frac{3}{4};\ \ y_p=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{3}{4}$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y=y_h+y_p=C\cdot e^{-2x}+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{3}{4}$

d) (1) $y' - 4y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x}\ \Rightarrow\ y_h = C\cdot e^{4x}$

(2) $y_p = a\cdot x^2 + b\cdot x + c;\ \ y_p'= 2a\cdot x + b;\ \ 2a\cdot x + b - 4a\cdot x^2 - 4b\cdot x - 4c = 8x^2 - 1\ \Rightarrow$
$-4a = 8$ und $2a - 4b = 0$ und $b - 4c = -1;\ \ a = -2;\ b = -1;\ c = 0;\quad y_p = -2x^2 - x$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y=y_h+y_p=C\cdot e^{4x}-2x^2-x$

Beispiel f. eine Addition von Sinusfunktionen gleicher Periode, die im Folgenden öfters verwendet wird:

$a\cdot\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha = A\cdot\sin(\alpha+\varphi)$ mit $A=\sqrt{a^2+b^2}$ und $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ mit Berücksichtigung des richtigen Quadranten für φ

4.25 **a)** (1) $y' + y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x}\ \Rightarrow\ y_h = C\cdot e^{-x}$

(2) $y_p = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x;\ \ y_p' = a\cdot\cos x - b\cdot\sin x;\ a\cdot\cos x - b\cdot\sin x + a\cdot\sin x + b\cdot\cos x = \sin x\ \Rightarrow$
$a+b=0$ und $-b+a=1;\ \ a=\frac{1}{2};\ b=-\frac{1}{2};\ \ y_p=\frac{1}{2}\cdot(\sin x-\cos x)=A\cdot\sin(x+\varphi)$;
$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \tan\varphi=\frac{b}{a}=-1\ \Rightarrow\ \varphi=-\frac{\pi}{2}=-45°$;
daher auch: $y_p=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(x-45°)$

(3) $y=y_h+y_p=C\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}\cdot(\sin x-\cos x)=C\cdot e^{-x}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin(x-45°)$

b) (1) $y' + 3y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x}\ \Rightarrow\ y_h = C\cdot e^{-3x}$

(2) $y_p = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x;\ \ y_p'= a\cdot\cos x - b\cdot\sin x;\ a\cdot\cos x - b\cdot\sin x + 3a\cdot\sin x + 3b\cdot\cos x = 10\cdot\sin x$
$\Rightarrow\ a + 3b = 0$ und $-b + 3a = 10;\ \ a = 3;\ b = -1;\ \ y_p = 3\cdot\sin x - \cos x = = A\cdot\sin(x+\varphi)$;
$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10};\quad \tan\varphi=\frac{b}{a}=-\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \varphi=-0{,}322=-18{,}4°$;
daher auch: $y_p = \sqrt{10}\cdot\sin(x - 18{,}4°)$

(3) $y=y_h+y_p=C\cdot e^{-3x}+\cdot 3\sin x-\cos x=C\cdot e^{-3x}+\sqrt{10}\cdot\sin(x-18{,}4°)$

4.25 **c)** (1) $y' + y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot t} \Rightarrow \lambda = -1;\; y_h = C\cdot e^{-t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin(3t) + b\cdot\cos(3t);\; y_p' = 3a\cdot\cos(3t) - 3b\cdot\sin(3t);$

$3a\cdot\cos(3t) - 3b\cdot\sin(3t) + a\cdot\sin(3t) + b\cdot\cos(3t) = 10\cdot\cos(3t) \Rightarrow 3a + b = 10$ und $-3b + a = 0;$

$a = 3;\; b = 1;\; y_P = 3\cdot\sin(3t) + \cos(3t) = A\cdot\sin(3t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{10};\quad \tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = 0{,}322 = 18{,}4°;$

daher auch: $y_p = \sqrt{10}\cdot\sin(3t + 18{,}4°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-t} + 3\sin(3t) + \cos(3t) = C\cdot e^{-t} + \sqrt{10}\cdot\sin(3t + 18{,}4°)$

d) (1) $y' + 2y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot t} \Rightarrow \lambda = -2;\; y_h = C\cdot e^{-2t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin(3t) + b\cdot\cos(3t);\; y_p' = 3a\cdot\cos(3t) - 3b\cdot\sin(3t);$

$3a\cdot\cos(3t) - 3b\cdot\sin(3t) + 2a\cdot\sin(3t) + 2b\cdot\cos(3t) = 13\cdot\cos(3t) \Rightarrow 3a + 2b = 13$ und

$-3b + 2a = 0;\quad a = 3;\; b = 2;\; y_P = 3\cdot\sin(3t) + 2\cdot\cos(3t) = A\cdot\sin(3t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13};\quad \tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi = 33{,}7°;$ daher auch: $y_p = \sqrt{13}\cdot\sin(3t + 33{,}7°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-2t} + 3\sin(3t) + 2\cos(3t) = C\cdot e^{-t} + \sqrt{13}\cdot\sin(3t + 33{,}7°)$

e) (1) $y' + 4y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot t} \Rightarrow \lambda = -4;\; y_h = C\cdot e^{-4t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin(2t) + b\cdot\cos(2t);\; y_p' = 2a\cdot\cos(2t) - 2b\cdot\sin(2t);$

$2a\cdot\cos(2t) - 2b\cdot\sin(2t) + 4a\cdot\sin(2t) + 4b\cdot\cos(2t) = 2\cdot\sin(2t) + \cos(2t) \Rightarrow 2a + 4b = 1$ und

$-2b + 4a = 2;\quad a = \frac{1}{2};\; b = 0;\; y_P = \frac{1}{2}\cdot\sin(2t);$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-4t} + \frac{1}{2}\cdot\sin(2t)$

f) (1) $y' + 3y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot t} \Rightarrow \lambda = -3;\; y_h = C\cdot e^{-3t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin\frac{t}{2} + b\cdot\cos\frac{t}{2};\; y_p' = \frac{a}{2}\cos\frac{t}{2} - \frac{b}{2}\cdot\sin\frac{t}{2};$

$\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{t}{2} - \frac{b}{2}\cdot\sin\frac{t}{2} + 3a\cdot\sin\frac{t}{2} + 3b\cdot\cos\frac{t}{2} = 37\cdot\sin\frac{t}{2} + 74\cdot\cos\frac{t}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + 3b = 74$ und

$-\frac{b}{2} + 3a = 37;\quad a = 16;\; b = 22;\; y_P = 16\cdot\sin\frac{t}{2} + 22\cdot\cos\frac{t}{2} = A\cdot\sin\left(\frac{t}{2} + \varphi\right);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{185};\; \tan\varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = 54{,}0°;$ daher auch: $y_p = 2\sqrt{185}\cdot\sin\left(\frac{t}{2} + 54{,}0°\right)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-3t} + 16\cdot\sin\frac{t}{2} + 22\cdot\cos\frac{t}{2} = C\cdot e^{-3t} + 2\sqrt{185}\cdot\sin\left(\frac{t}{2} + 54{,}0°\right)$

g) (1) $y' + 2y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot t} \Rightarrow \lambda = -2;\; y_h = C\cdot e^{-2t}$

(2) $5\sqrt{2}\cdot\sin(t + 45°) = 5\sqrt{2}\cdot(\sin t\cdot\cos 45° + \sin 45°\cdot\cos t) = 5\cdot\sin t + 5\cdot\cos t$

$y_p = a\cdot\sin t + b\cdot\cos t;\; y_p' = a\cdot\cos t - b\cdot\sin t;$

$a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + 2a\cdot\sin t + 2b\cdot\cos t = 5\cdot\sin t + 5\cdot\cos t \Rightarrow a + 2b = 5$ und

$-b + 2a = 5;\quad a = 3;\; b = 1;\; y_P = 3\cdot\sin t + \cos t = A\cdot\sin(t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{10};\; \tan\varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = 18{,}4°;$ daher auch: $y_p = \sqrt{10}\cdot\sin(t + 18{,}4°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-2t} + 3\cdot\sin t + \cos t = C\cdot e^{-2t} + \sqrt{10}\cdot\sin(t + 18{,}4°)$

4.26 **a)** (1) $y' + 2y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x} \Rightarrow y_h = C\cdot e^{-2x}$

(2) $y' + p\cdot y = s(x)$; $p = 2$; Störfunktion $s(x) = A\cdot e^{b\cdot x}$ mit $A = 1$ und $b = -1$; da $b \neq -p$, Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung: $y_p = a\cdot e^{b\cdot x} = a\cdot e^{-x}$; $y_p' = -a\cdot e^{-x}$; $-a\cdot e^{-x} + 2a\cdot e^{-x} = e^{-x}$ oder $e^{-x}\cdot(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 1$; $y_p = e^{-x}$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-2x} + e^{-x}$

b) (1) $y' + 2y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x} \Rightarrow y_h = C\cdot e^{-2x}$

(2) $y' + p\cdot y = s(x)$; $p = 2$; Störfunktion $s(x) = A\cdot e^{b\cdot x}$ mit $A = 1$ und $b = -2$; da nun $b = -p$, Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung: $y_p = a\cdot x\cdot e^{b\cdot x} = a\cdot x\cdot e^{-2x}$; $y_p' = a\cdot e^{-2x} - 2a\cdot x\cdot e^{-2x}$; $a\cdot e^{-2x} - 2a\cdot x\cdot e^{-2x} + 2\cdot a\cdot x\cdot e^{-2x} = e^{-2x}$ oder $e^{-2x}\cdot(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 1$; $y_p = x\cdot e^{-2x}$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-2x} + x\cdot e^{-2x} = (x + C)\cdot e^{-2x}$

c) (1) $y' - 3y = 0$; Exponentialansatz: $y_h = C\cdot e^{\lambda\cdot x} \Rightarrow y_h = C\cdot e^{3x}$

(2) $y' + p\cdot y = s(x)$; $p = -3$; Störfunktion $s(x) = A\cdot e^{b\cdot x}$ mit $A = 10$ und $b = -2$; da $b \neq -p$, Lösungsansatz für eine partikuläre Lösung: $y_p = a\cdot e^{bx} = a\cdot e^{-2x}$; $y_p' = -2a\cdot e^{-2x}$; $-2a\cdot e^{-2x} - 3a\cdot e^{-2x} = 10\cdot e^{-2x}$ oder
$e^{-2x}\cdot(-5a - 10) = 0 \Rightarrow a = -2$; $y_p = -2\cdot e^{-2x}$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{3x} - 2\cdot e^{-2x}$

4.27 **a)** (1) $y' + 5y = 0$; Exponentialansatz $\Rightarrow y_h = C\cdot e^{-5x}$

(2) $y_p = a$; $y_p' = 0$; $0 + 5a = 20 \Rightarrow a = 4$; $y_p = 4$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-5x} + 4$

$y(1) = C\cdot e^{-5} + 4 = 2 \Rightarrow C = -2\cdot e^{5}$; gesuchte partik. Lös.: $y = -2\cdot e^{5}\cdot e^{-5x} + 4 = 4 - 2\cdot e^{5\cdot(1-x)}$

b) (1) $y' - 3y = 0$; Exponentialansatz $\Rightarrow y_h = C\cdot e^{3x}$

(2) $y_p = a\cdot x + b$; $y_p' = a$; $a - 3a\cdot x - 3b = 9x + 18 \Rightarrow a - 3b = 18$ und $-3a = 9$; $a = -3$; $b = -7$; $y_p = -3x - 7$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C\cdot e^{3x} - 3x - 7$

$y(1) = C\cdot e^{3} - 3 - 7 = 2 \Rightarrow C = 12\cdot e^{-3}$; gesuchte partik. Lös.: $y = 12\cdot e^{3\cdot(x-1)} - 3x - 7$

c) (1) $y' - 4y = 0$; Exponentialansatz $\Rightarrow y_h = C\cdot e^{4x}$

(2) $y_p = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$; $y_p' = 2a\cdot x + b$; $2a\cdot x + b - 4a\cdot x^2 - 4b\cdot x - 4c = 32\cdot x^2 \Rightarrow b - 4c = 0$ und $2a - 4b = 0$ und $-4a = 32$; $a = -8$; $b = -4$; $c = -1$; $y_p = -8x^2 - 4x - 1$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C\cdot e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1$

$y(0) = C - 1 = 2 \Rightarrow C = 3$; gesuchte partik. Lös.: $y = 3\cdot e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1$

d) (1) $y' + y = 0$; Exponentialansatz $\Rightarrow y_h = C\cdot e^{-x}$

(2) $y_p = a\cdot e^{x}$; $y_p' = a\cdot e^{x}$; $a\cdot e^{x} + a\cdot e^{x} = 2\cdot e^{x}$ oder $e^{x}\cdot(2a - 2) = 0 \Rightarrow a = 1$; $y_p = e^{x}$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-x} + e^{x}$

$y(0) = C + 1 = 6 \Rightarrow C = 5$; gesuchte partik. Lös.: $y = 5\cdot e^{-x} + e^{x}$

e) (1) $y' - y = 0$; Exponentialansatz $\Rightarrow y_h = C\cdot e^{x}$

(2) $y_p = a\cdot x\cdot e^{x}$ (!); $y_p' = a\cdot e^{x} + a\cdot x\cdot e^{x}$; $a\cdot e^{x} + a\cdot x\cdot e^{x} - a\cdot x\cdot e^{x} = 3\cdot e^{x}$; $a = 3$; $y_p = 3x\cdot e^{x}$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C\cdot e^{x} + 3x\cdot e^{x}$

$y(1) = C\cdot e + 3e = 1 \Rightarrow C = e^{-1} - 3$;
gesuchte partik. Lös.: $y = (e^{-1} - 3)\cdot e^{x} + 3x\cdot e^{x} = 3e^{x}\cdot(x-1) + e^{x-1}$

f) (1) $y' + 10y = 0$; Exponentialansatz $\Rightarrow y_h = C\cdot e^{-10x}$

(2) $y_p = a\cdot e^{2x}$; $y_p' = 2a\cdot e^{2x}$; $2a\cdot e^{2x} + 10\cdot a\cdot e^{2x} = 12\cdot e^{2x}$; $a = 1$; $y_p = e^{2x}$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-10x} + e^{2x}$

$y(0) = C + 1 = 2 \Rightarrow C = 1$; gesuchte partik. Lös.: $y = e^{-10x} + e^{2x}$

4.28 **a)** (1) $y' + y = 0;\ y_h = C\cdot e^{-t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin t + b\cdot\cos t;\ y_p' = a\cdot\cos t - b\cdot\sin t;\ a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + a\cdot\sin t + b\cdot\cos t = 2\cdot\sin t \Rightarrow$

$a + b = 0$ und $-b + a = 2;\ a = 1;\ b = -1;\ y_p = \sin t - \cos t = A\cdot\sin(t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2};\quad \tan\varphi = b/a = -1 \Rightarrow \varphi = -45°$; daher auch: $y_p = \sqrt{2}\cdot\sin(t-45°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-t} + \sin t - \cos t = C\cdot e^{-t} + \sqrt{2}\cdot\sin(t-45°)$

$y(0) = C + \sin 0 - \cos 0 = C - 1 = 1 \Rightarrow C = 2;$

gesuchte part. Lösg.: $y = 2\cdot e^{-t} + \sin t - \cos t = 2\cdot e^{-t} + \sqrt{2}\cdot\sin(t-45°)$

b) (1) $y' + 2y = 0;\ y_h = C\cdot e^{-2t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin t + b\cdot\cos t;\ y_p' = a\cdot\cos t - b\cdot\sin t;\ a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + 2a\cdot\sin t + 2b\cdot\cos t = 5\cdot\cos t \Rightarrow$

$a + 2b = 5$ und $-b + 2a = 0;\ a = 1;\ b = 2;\ y_p = \sin t + 2\cdot\cos t = A\cdot\sin(t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5};\quad \tan\varphi = b/a = 2 \Rightarrow \varphi = 63{,}4°$; daher auch: $y_p = \sqrt{5}\cdot\sin(t+63{,}4°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-2t} + \sin t + 2\cdot\cos t = C\cdot e^{-2t} + \sqrt{5}\cdot\sin(t+63{,}4°)$

$y(0) = C + \sin 0 + 2\cdot\cos 0 = C + 2 = 0 \Rightarrow C = -2;$

gesuchte part. Lösg.: $y = -2\cdot e^{-2t} + \sin t + 2\cos t = -2\cdot e^{-2t} + \sqrt{5}\cdot\sin(t+63{,}4°)$

c) (1) $y' + 3y = 0;\ y_h = C\cdot e^{-3t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin(3t) + b\cdot\cos(3t);\ y_p' = 3a\cdot\cos(3t) - 3b\cdot\sin(3t);$

$3a\cdot\cos(3t) - 3b\cdot\sin(3t) + 3a\cdot\sin(3t) + 3b\cdot\cos(3t) = 12\cdot\cos(3t) \Rightarrow$

$3a + 3b = 12$ und $-3b + 3a = 0;\ a = 2;\ b = 2;\ y_p = 2\cdot\sin(3t) + 2\cos(3t) = A\cdot\sin(3t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8};\quad \tan\varphi = b/a = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$; daher auch: $y_p = \sqrt{8}\cdot\sin(3t+45°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-3t} + 2\sin(3t) + 2\cos(3t) = C\cdot e^{-3t} + \sqrt{8}\cdot\sin(3t+45°)$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = -2$; ges. p. Lösg.: $y = -2\cdot e^{-3t} + 2\sin(3t) + 2\cos(3t) = -2\cdot e^{-3t} + \sqrt{8}\cdot\sin(3t+45°)$

d) (1) $y' + 3y = 0;\ y_h = C\cdot e^{-3t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin(3t) + b\cdot\cos(3t);\ y_p' = 3a\cdot\cos(3t) - 3b\cdot\sin(3t);$

$3a\cdot\cos(3t) - 3b\cdot\sin(3t) + 3a\cdot\sin(3t) + 3b\cdot\cos(3t) = 6\cdot\sin(3t) \Rightarrow$

$3a + 3b = 0$ und $-3b + 3a = 6;\ a = 1;\ b = -1;\ y_p = \sin(3t) - \cos(3t) = A\cdot\sin(3t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2};\quad \tan\varphi = b/a = -1 \Rightarrow \varphi = -45°$; daher auch: $y_p = \sqrt{2}\cdot\sin(3t-45°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-3t} + \sin(3t) - \cos(3t) = C\cdot e^{-3t} + \sqrt{2}\cdot\sin(3t-45°)$

$y(0) = 2 \Rightarrow C = 3$; ges. part. Lösg.: $y = 3\cdot e^{-3t} + \sin(3t) - \cos(3t) = 3\cdot e^{-3t} + \sqrt{2}\cdot\sin(3t-45°)$

e) (1) $y' + 10y = 0;\ y_h = C\cdot e^{-10t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin(2t) + b\cdot\cos(2t);\ y_p' = 2a\cdot\cos(2t) - 2b\cdot\sin(2t);$

$2a\cdot\cos(2t) - 2b\cdot\sin(2t) + 10a\cdot\sin(2t) + 10b\cdot\cos(2t) = 52\cdot\sin(2t) \Rightarrow$

$2a + 10b = 0$ und $-2b + 10a = 52;\ a = 5;\ b = -1;\ y_p = 5\sin(2t) - \cos(2t) = A\cdot\sin(2t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{26};\ \tan\varphi = b/a = -\frac{1}{5} \Rightarrow \varphi = -11{,}3°$; so auch: $y_p = \sqrt{26}\cdot\sin(2t-11{,}3°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-10t} + 5\sin(2t) - \cos(2t) = C\cdot e^{-10t} + \sqrt{26}\cdot\sin(2t-11{,}3°)$

$y(0) = 1 \Rightarrow C = 2$; ges. p. Lösg.: $y = 2\cdot e^{-10t} + 5\sin(2t) - \cos(2t) = 2\cdot e^{-10t} + \sqrt{26}\cdot\sin(2t-11{,}3°)$

f) (1) $y' + 2y = 0;\ y_h = C\cdot e^{-2t}$

(2) $y_p = a\cdot\sin(2t) + b\cdot\cos(2t);\ y_p' = 2a\cdot\cos(2t) - 2b\cdot\sin(2t);$

$2a\cdot\cos(2t) - 2b\cdot\sin(2t) + 2a\cdot\sin(2t) + 2b\cdot\cos(2t) = 4\cdot\cos(2t) \Rightarrow$

$2a + 2b = 4$ und $-2b + 2a = 0;\ a = 1;\ b = 1;\ y_p = \sin(2t) + \cos(2t) = A\cdot\sin(2t + \varphi);$

$A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2};\quad \tan\varphi = b/a = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$; daher auch: $y_p = \sqrt{2}\cdot\sin(2t+45°)$

(3) $y = y_h + y_p = C\cdot e^{-2t} + \sin(2t) + \cos(2t) = C\cdot e^{-2t} + \sqrt{2}\cdot\sin(2t+45°)$

$y(0) = 2 \Rightarrow C = 1$; ges. partikuläre Lösg.: $y = e^{-2t} + \sin(2t) + \cos(2t) = e^{-2t} + \sqrt{2}\cdot\sin(2t+45°)$

4.28 **g)** (1) $y' + y = 0$; $y_h = C \cdot e^{-t}$

(2) $y_p = a \cdot \sin t + b \cdot \cos t$; $y_p' = a \cdot \cos t - b \cdot \sin t$;
$a \cdot \cos t - b \cdot \sin t + a \cdot \sin t + b \cdot \cos t = \sin t + 3\cos t \Rightarrow$
$a + b = 3$ und $-b + a = 1$; $a = 2$; $b = 1$; $y_p = 2\sin t + \cos t = A \cdot \sin(t + \varphi)$;
$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$; $\tan\varphi = b/a = 0{,}5 \Rightarrow \varphi = 26{,}6°$; daher auch: $y_p = \sqrt{5} \cdot \sin(t + 26{,}6°)$

(3) $y = y_h + y_p = C \cdot e^{-t} + 2\sin t + \cos t = C \cdot e^{-t} + \sqrt{5} \cdot \sin(t + 26{,}6°)$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = -1$; gesuchte partik. Lösg.: $y = -e^{-t} + 2\sin t + \cos t = -e^{-t} + \sqrt{5} \cdot \sin(t + 26{,}6°)$

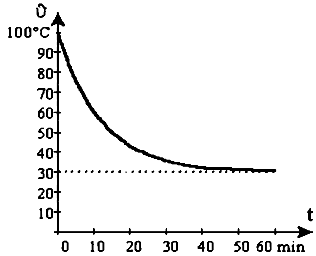
h) (1) $y' + y = 0$; $y_h = C \cdot e^{-t}$

(2) $y_p = a \cdot \sin t + b \cdot \cos t$; $y_p' = a \cdot \cos t - b \cdot \sin t$;
$a \cdot \cos t - b \cdot \sin t + a \cdot \sin t + b \cdot \cos t = 8\sin t + 6\cos t \Rightarrow$
$a + b = 6$ und $-b + a = 8$; $a = 7$; $b = -1$; $y_p = 7\sin t - \cos t = A \cdot \sin(t + \varphi)$;
$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{50}$; $\tan\varphi = b/a = -1/7 \Rightarrow \varphi = -8{,}1°$; so auch: $y_p = \sqrt{50} \cdot \sin(t - 8{,}1°)$

(3) $y = y_h + y_p = C \cdot e^{-t} + 7\sin t - \cos t = C \cdot e^{-t} + \sqrt{50} \cdot \sin(t - 8{,}1°)$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = 1$; gesuchte partikuläre Lösg.: $y = e^{-t} + 7\sin t - \cos t = e^{-t} + \sqrt{50} \cdot \sin(t - 8{,}1°)$

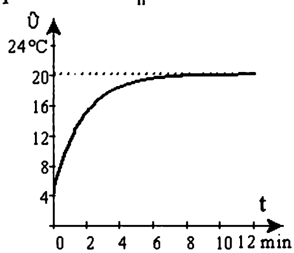
4.29 Differentialgleichung siehe Beispiel 4.15, Lehrbuch Seite 143 f.:
$\frac{d\vartheta}{dt} = k \cdot (\vartheta - \vartheta_M) = k \cdot (\vartheta - 30)$ oder $\frac{d\vartheta}{dt} - k \cdot \vartheta = -30k$; lineare Differentialgleichung mit konstantem Koeff. -k; Lösung d. homog. Gl. $d\vartheta/dt - k \cdot \vartheta = 0$ durch Expon.ansatz: $\vartheta_h = C \cdot e^{k \cdot t}$.
Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomog. Gl.: $\vartheta_p = a$.
Einsetzen: $0 - k \cdot a = -30 \cdot k \Rightarrow a = 30$; $\vartheta_p = 30$. Allgemeine Lösung der inhomog. Gl.: $\vartheta = C \cdot e^{k \cdot t} + 30$; Anfangsbedingung:
$\vartheta(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} + 30 = C + 30 = 100 \Rightarrow C = 70$. Gesuchte partik. Lösung: $\vartheta(t) = \vartheta_p + \vartheta_h = 30 + 70 \cdot e^{k \cdot t}$. $\vartheta(4) = 30 + 70 \cdot e^{k \cdot 4} = 80$;
$70 \cdot e^{4k} = 50$; $e^{4k} = 5/7$; $4k = \ln(5/7) \Rightarrow k = -0{,}0841\ \text{min}^{-1}$. Somit:
$\vartheta(t) = 30 + 70 \cdot e^{-0{,}0841 \cdot t}$. $31 = 30 + 70 \cdot e^{-0{,}0841 \cdot t}$; $e^{-0{,}0841 \cdot t} = 1/70$;
$-0{,}0841 \cdot t \ln e = \ln(1/70) \Rightarrow t \approx 51$ min.



Lösungsvariante durch Trennung derVariablen: $\frac{d\vartheta}{dt} = k \cdot (\vartheta - 30)$; $\frac{d\vartheta}{\vartheta - 30} = k \cdot dt$;

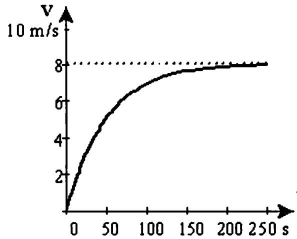
$\ln|\vartheta - 30| = k \cdot t + \bar{C}$; da $\vartheta - 30 \geq 0$, ist $|\vartheta - 30| = \vartheta - 30$; $\ln(\vartheta - 30) = k \cdot t + \bar{C}$; $\vartheta - 30 = e^{k \cdot t} \cdot \underbrace{e^{\bar{C}}}_{C}$ usw.

4.30 Differentialgleichung siehe Beispiel 4.15, Lehrbuch Seite 143 f.:
$\frac{d\vartheta}{dt} = k \cdot (\vartheta - \vartheta_M) = k \cdot (\vartheta - 20)$ oder $\frac{d\vartheta}{dt} - k \cdot \vartheta = -20k$; lineare Differentialgleichung mit konstantem Koeff. -k; Lösung d. homog. Gl. $d\vartheta/dt - k \cdot \vartheta = 0$ durch Expon.ansatz: $\vartheta_h = C \cdot e^{k \cdot t}$.
Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomog. Gl.: $\vartheta_p = a$.
Einsetzen: $0 - k \cdot a = -20 \cdot k \Rightarrow a = 20$; $\vartheta_p = 20$. Allgemeine Lösung der inhomog. Gl.: $\vartheta = C \cdot e^{k \cdot t} + 20$; Anfangsbedingung:
$\vartheta(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} + 20 = C + 20 = 4 \Rightarrow C = -16$. Gesuchte partik. Lösung: $\vartheta(t) = \vartheta_p + \vartheta_h = 20 - 16 \cdot e^{k \cdot t}$. $\vartheta(2) = 20 - 16 \cdot e^{k \cdot 2} = 15$
$\Rightarrow k = -0{,}582\ \text{min}^{-1}$. Somit: $\vartheta(t) = 10 - 16 \cdot e^{-0{,}582 \cdot t}$.
$19{,}9 = 20 - 16 \cdot e^{-0{,}582 \cdot t}$; daraus $t = 8{,}7$ min.



Lösung wie in Aufgabe 4.29 auch durch Trennung der Variablen.

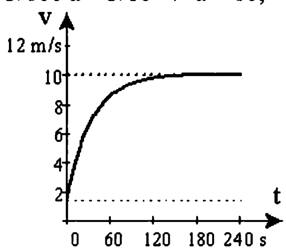
4.31 **a)** $3000 \cdot \frac{dv}{dt} = 480 - 60 \cdot v$ oder $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{50} v = \frac{4}{25}$; lineare Diff.gl. mit konstantem Koeff. $\frac{1}{50}$;



Lösung d. homog. Gl. $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{50} v = 0$ durch Exponentialansatz: $v_h = C \cdot e^{-t/50}$. Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomog. Gl.: $v_p = a$. Einsetzen: $0 + (1/50) \cdot a = 4/25 \Rightarrow a = 8$; $v_p = 8$.
Allgemeine Lösung der inhomog. Gl.: $v = C \cdot e^{-t/50} + 8$;
Anfangsbedingung: $v(0) = C \cdot 1 + 8 = 0 \Rightarrow C = -8$.
Gesuchte partikuläre Lösung: $v(t) = v_p + v_h = 8 \frac{m}{s} \cdot \left(1 - e^{-t/50\,s}\right)$.
Lösung auch durch Trennung der Variablen.

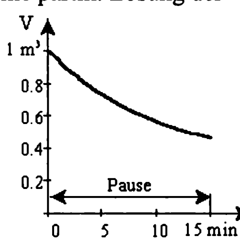
b) Erreichbare Höchstgeschwindigkeit: $v_{max} = \lim_{t \to \infty} v(t) = 8 \frac{m}{s} = 28{,}8 \frac{km}{h}$; Berechnung auch, wenn in $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{50} v = \frac{4}{25}$ die Geschwindigkeitszunahme $dv/dt = 0$: $0 + \frac{1}{50} v = \frac{4}{25} \Rightarrow v = v_{max} = 8 \frac{m}{s}$.

4.32 $1200 \cdot \frac{dv}{dt} = 360 - 36 \cdot v$ oder $\frac{dv}{dt} + \frac{3}{100} v = \frac{3}{10}$; lineare Diff.gl. mit konstantem Koeff. $\frac{3}{100}$; zu
4,66
beachten ist, dass der Reibungskoeffizient k in kg/s, aber die Anfangsgeschwindigkeit in km/h gegeben ist. Lösung d. homog. Gl. $\frac{dv}{dt} + \frac{3}{100} v = 0$ durch Exponentialansatz $v_h = C \cdot e^{-3t/100}$. Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomog. Gl.: $v_p = a$. Einsetzen: $0 + 3/100 \cdot a = 3/10 \Rightarrow a = 10$;
$v_p = 10 \frac{m}{s}$. Allg. Lösung der inhomog. Gl.: $v(t) = C \cdot e^{-3t/100} + 10$;



Anfangsbedingung: $v(0) = C \cdot 1 + 10 = 5000\,m/3600\,s \Rightarrow$
$C = -8{,}61$. Gesuchte partikuläre Lösung:
$v(t) = v_p + v_h = 10 \frac{m}{s} - 8{,}61 \frac{m}{s} \cdot e^{-3t/100\,s}$.
$v(t = 60\,s) = 10 - 8{,}61 \cdot e^{-3 \cdot 60/100} \approx 8{,}6 \frac{m}{s} \approx 31 \frac{km}{h}$.

4.33 **a)** Wird in einer Minute 100 m^3 Frischluft zugeführt, so wird in der Zeitspanne dt (etwa dt = 1/1000 min) zu irgendeinem Zeitpunkt t in der Pause $100 \cdot dt$ m^3 Frischluft zugeführt. Zur Zeit t nach Pausenbeginn befinden sich noch V(t) m^3 CO_2 im Raum. In einem Raum von 1000 m^3 bedeutet dies einen CO_2–Anteil von V/1000 oder pro 100 m^3 Abluft einen CO_2–Gehalt von $V/1000 \cdot 100$. Während der Zeitspanne dt wird somit CO_2 der Menge $V/1000 \cdot 100 \cdot dt$ abgeführt. Modellannahme: Der CO_2–Gehalt sei stets im ganzen Raum gleich.
$dV/dt + 0{,}1 \cdot V = 0{,}03$; lineare Diff.gl. mit konstantem Koeff. 0,1; Lösung d. homog. Gl. $dV/dt + 0{,}1 \cdot V = 0$ durch Exponentialansatz $V_h = C \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$. Ansatz f. eine partik. Lösung der inhomog. Gl.: $V_p = a$. Einsetzen: $0 + 1/10 \cdot a = 3/100 \Rightarrow a = 3/10$.



Allg. Lösung der inhomog. Gl.: $V(t) = C \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 0{,}3$;
Anfangsbedingung: $V(0) = C \cdot 1 + 0{,}3 = 1000 \cdot 0{,}1\% = 1 \Rightarrow C = 0{,}7$.
Gesuchte partikuläre Lösung: $V(t) = 0{,}7 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} + 0{,}3$, t in Minuten, V in m^3. Lösung auch durch Trennung der Variablen.
$V(t = 15\,min) = 0{,}456\,m^3$; CO_2–Gehalt sinkt am Pausenende auf $0{,}456\,m^3/1000\,m^3 \approx 0{,}046\%$.

b) Ist Q die zugeführte Frischluftmenge pro min (oben in a) war Q = 100), so gilt nun:
$dV = 0{,}0003\,Q \cdot dt - \frac{V}{1000} \cdot Q \cdot dt$ und daher $\frac{dV}{dt} + \frac{Q}{1000} \cdot V = 0{,}0003 \cdot Q$; Lösung wie in a).
$V(t) = 0{,}7 \cdot e^{-Q \cdot t/1000} + 0{,}3$ (t in min, V in m^3); $V(t = 15) = 0{,}7 \cdot e^{-Q \cdot 15/1000} + 0{,}3 = 0{,}0004 \cdot 1000$;
Lösung dieser Exponentialgleichung: $Q \approx 130\,m^3$

4.34 a) Überlegung zur Differentialgleichung entsprechend den Ausführungen zu 4.33.

m(t) Salzmenge (in kg) im Behälter zur Zeit t; $dm = 0{,}05 \cdot 10 \cdot dt - \frac{m}{1000-(15-10)\cdot t} \cdot 15 \cdot dt$;

daraus: $\frac{dm}{dt} + \frac{3}{200-t} \cdot m = \frac{1}{2}$; dies ist eine lineare Differentialgleichung mit *nicht* konstantem Koeffizienten $p(t) = \frac{3}{200-t}$; Lösung durch *Variation der Konstanten*!

Lösung der homogenen Diff. gl. $\frac{dm}{dt} + \frac{3}{200-t} \cdot m = 0$ durch Trennung der Variablen:

$\int \frac{dm}{m} = \int \frac{3\,dt}{t-200}$; $\ln|m| = 3 \cdot \ln|t-200| + \overline{C}$; da $m \geq 0$, ist $|m| = m$; da $t - 200 < 0$, ist $|t-200| = -(t-200) = 200 - t$; $\ln m = 3 \cdot \ln(200-t) + \overline{C}$; $\ln m = \ln(200-t)^3 + \overline{C}$;

$\ln m - \ln(20-t)^3 = \overline{C}$; $\ln \frac{m}{(20-t)^3} = \overline{C}$; $m = \underbrace{e^{\overline{C}}}_{C} \cdot (200-t)^3$; $m = m_h = C \cdot (200-t)^3$;

Variation der Konstanten C in m_h: $m = K(t) \cdot (200-t)^3$; Einsetzen in die inhomogene Gl.

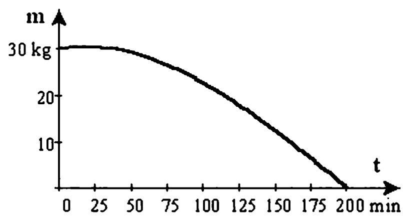
$\frac{dm}{dt} + \frac{3}{200-t} \cdot m = \frac{1}{2}$: $K' \cdot (200-t)^3 + K \cdot 3 \cdot (200-t)^2 \cdot (-1) + \frac{3}{200-t} \cdot K \cdot (200-t)^3 = \frac{1}{2}$;

$K' \cdot (200-t)^3 = \frac{1}{2}$; $K(t) = \frac{1}{4 \cdot (200-t)^2} + C$. Allgemeine

Lösung: $m(t) = K(t) \cdot (200-t)^3 = \frac{200-t}{4} + C \cdot (200-t)^3$;

Anfangsbedingung: $m(0) = 50 + C \cdot 200^3 = 30 \Rightarrow$

$C = -\frac{1}{400\,000}$; $m(t) = \frac{200-t}{4} \cdot \left[1 - \frac{(200-t)^2}{100\,000}\right] \text{kg}$;



$m(t = 60 \text{ min}) \approx 28{,}1$ kg;

b) $m' = -\frac{1}{4} \cdot \left[1 - \frac{(200-t)^2}{100\,000}\right] + \frac{200-t}{4} \cdot \frac{2 \cdot (200-t)}{100\,000} = -\frac{1}{4} \cdot \left[1 - \frac{(200-t)^2}{100\,000}\right] + \frac{2 \cdot (200-t)^2}{400\,000} = -\frac{1}{4} + \frac{3 \cdot (200-t)^2}{400\,000}$;

$-\frac{1}{4} + \frac{3 \cdot (200-t)^2}{400\,000} = 0 \Rightarrow t_1 = 17{,}4$ min ($t_2 = 382{,}6$ min sachlich nicht sinnvoll);

$m'' = \frac{3 \cdot 2 \cdot (200-t) \cdot (-1)}{400\,000} = -\frac{3 \cdot (200-t)}{200\,000}$; $m''(t_1) < 0 \Rightarrow t_1$ ist Max.stelle; $m_{max} = m(t_1) \approx 30{,}4$ kg.

4.35 a) Überlegung zu den Differentialgleichungen entsprechend den Ausführungen zu 4.33.

$\frac{dM}{dt} + \frac{2}{100} \cdot M = 0$; Lösung durch Expon. ansatz: $M = C \cdot e^{-t/50}$;

Anfangsbedingung: $M(0) = C \cdot 1 = 5 \Rightarrow C = 5$; $M(t) = 5 \text{ kg} \cdot e^{-t/50\text{min}}$.

$\frac{dm}{dt} + \frac{1}{50} \cdot m = \frac{1}{50} \cdot 5 \cdot e^{-\frac{t}{50}}$; lineare Diff. gl. mit konstantem Koeffizienten $\frac{1}{50}$; Lösung der homog. Gl. $dm/dt + m/50 = 0$ durch Exponentialansatz $m_h = C \cdot e^{-t/50}$. Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung: $m_p = a \cdot t \cdot e^{-t/50}$ (!). Einsetzen:

$a \cdot e^{-t/50} + a \cdot t \cdot e^{-t/50}(-1/50) + (1/50) \cdot a \cdot t \cdot e^{-t/50} = (5/50) \cdot e^{-t/50} \Rightarrow a = 1/10$. Allg. Lösung der inhomog. Gl.: $m(t) = m_h + m_p = C \cdot e^{-t/50} + (1/10) \cdot t \cdot e^{-t/50} = (C + t/10) \cdot e^{-t/50}$;

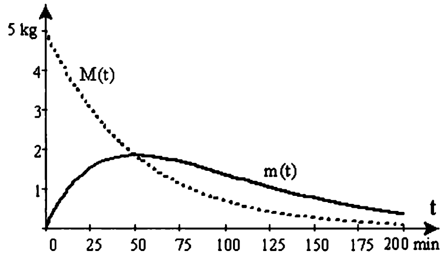
Anfangsbedingung: $m(0) = (C + 0) \cdot 1 = 0 \Rightarrow C = 0$.

Gesuchte partikuläre Lösung: $m(t) = 0{,}1 \text{ kg} \cdot t \cdot e^{-t/50\text{ min}}$.

Lösung auch durch Trennung der Variablen.

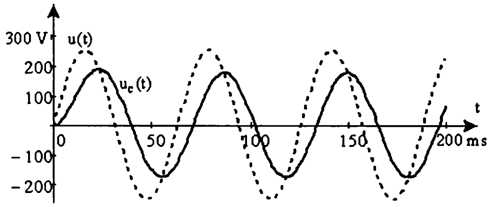
Salzmasse in der zweiten Tonne nach einer Stunde: $m(60) = 0{,}1 \cdot 60 \cdot e^{-60/50} = 1{,}81$ kg

4.35 **b)** $m' = 0{,}1 \cdot e^{-t/50} + 0{,}1 \cdot t \cdot e^{-t/50} \cdot (-1/50) =$
$= 0{,}1 \cdot e^{-t/50} \cdot (1 - t/50) = 0 \Rightarrow t = 50 \text{ min}$;
$m'' = \left(\frac{t}{25000} - \frac{1}{250}\right) \cdot e^{-t/50}$; $m(50) < 0 \Rightarrow$
$t = 50$ ist Max. stelle; $m_{max} = m(50) = 1{,}84$ kg.



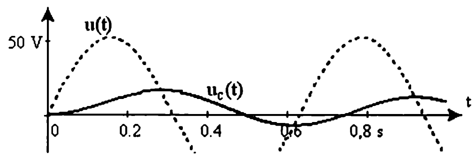
4.36 2. Kirchhoffsche Regel: $u_R + u_C = u$ für $t \geq 0$; wegen $q = C \cdot u_C$ ist $u_R = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = RC \cdot \frac{du_C}{dt}$; damit ergibt sich die lineare Diff. gl. $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u$ mit $u_C(0) = 0$. Bei allen Lösungen ergibt sich ein exponentiell abklingender flüchtiger Teil sowie ein bleibender Teil, die "Sinusantwort".

a) $R = 500\ \Omega$; $C = 2 \cdot 10^{-5}$ F; $u(t) = 250 \cdot \sin(100t)$;
Spannungen in Volt; Einsetzen in d. Diff. gl.:
$\frac{1}{100} \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 250 \cdot \sin(100t)$ oder
$du_C/dt + 100 \cdot u_C = 25000 \cdot \sin(100t)$; Lösung von $du_C/dt + 100 \cdot u_C = 0$ durch Exponential-



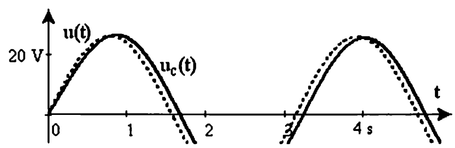
ansatz: $u_{C,h} = K \cdot e^{-100t}$. Die Integrationskonstante wird mit K bezeichnet, um eine Verwechslung mit der Kapazität C zu vermeiden. Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogen Gl.: $u_{C,p} = a \cdot \sin(100t) + b \cdot \cos(100t)$. Einsetzen in die inhomogene Gleichung:
$100a \cdot \cos(100t) - 100b \cdot \sin(100t) + 100a \cdot \sin(100t) + 100b \cdot \cos(100t) = 25000 \cdot \sin(100t) \Rightarrow$
$100 \cdot a + 100 \cdot b = 0$ und $-100 \cdot b + 100 \cdot a = 25000$; $a + b = 0$ und $-b + a = 250 \Rightarrow a = 125$,
$b = -125$. Allgemeine Lös.: $u_C(t) = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-100t} + 125 \cdot \sin(100t) - 125 \cdot \cos(100t)$;
$A = \sqrt{a^2 + b^2} = 125\sqrt{2} = 176{,}8$; $\tan\varphi = b/a = -1 \Rightarrow \varphi = -45°$; daher auch:
$u_C(t) = K \cdot e^{-100t} + 176{,}8 \cdot \sin(100t - 45°)$. Anf. bed.: $u_C(0) = K - 125 = 0 \Rightarrow C = 125$. Gesuchte partik. Lös.: $u_C(t) = 125 \cdot \left[e^{-100t} + \sin(100t) - \cos(100t)\right] = 125 \cdot e^{-100t} + 176{,}8 \cdot \sin(100t - 45°)$

b) $R = 10000\ \Omega$; $C = 50 \cdot 10^{-6}$ F; $u(t) = 52 \cdot \sin(10t)$;
$\frac{du_C}{dt} + 2u_C = 104 \cdot \sin(10t)$; $u_{C,h} = K \cdot e^{-2t}$;
Ansatz: $u_{C,p} = a \cdot \sin(10t) + b \cdot \cos(10t)$;



$10a \cdot \cos(10t) - 10b \cdot \sin(10t) + 2a \cdot \sin(10t) + 2b \cdot \cos(10t) = 104 \cdot \sin(10t) \Rightarrow a = 2; b = -10$;
$u_C(t) = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-2t} + 2 \cdot \sin(10t) - 10 \cdot \cos(10t)$; $u_C(0) = K - 10 = 0 \Rightarrow K = 10$.
$u_C(t) = 10 \cdot e^{-2t} + 2 \cdot \sin(10t) - 10 \cdot \cos(10t) = 10 \cdot e^{-2t} + 10{,}20 \cdot \sin(10t - 78{,}7°)$

c) $R = 100000\ \Omega$; $C = 10^{-6}$ F; $u(t) = 26 \cdot \sin(2t)$;
$\frac{du_C}{dt} + 10u_C = 260 \cdot \sin(2t)$; $u_{C,h} = K \cdot e^{-10t}$;
Ansatz: $u_{C,p} = a \cdot \sin(2t) + b \cdot \cos(2t)$;



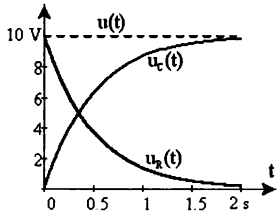
$2a \cdot \cos(2t) - 2b \cdot \sin(2t) + 10a \cdot \sin(2t) + 10b \cdot \cos(2t) = 260 \cdot \sin(2t) \Rightarrow a = 25; b = -5$;
$u_C(t) = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot e^{-10t} + 25 \cdot \sin(2t) - 5 \cdot \cos(2t)$; $u_C(0) = K - 5 = 0 \Rightarrow K = 5$. Gesuchte partikuläre Lösung: $u_C(t) = 5 \cdot e^{-10t} + 25 \cdot \sin(2t) - 5 \cdot \cos(2t) = 5 \cdot e^{-10t} + 25{,}50 \cdot \sin(2t - 11{,}3°)$

4.37 $RC\cdot\frac{du_C}{dt}+u_C=u$; $R=10000\ \Omega$; $C=5\cdot10^{-5}$ F; $u(t)=U_0=20\ \Rightarrow$

$\frac{du_C}{dt}+2u_C=20$; $u_{C,h}=K\cdot e^{-2t}$; Ansatz: $u_{C,p}=a$; Einsetzen:

$0+2a=20\Rightarrow a=10$; $u_{C,p}=10$; $u_C(t)=u_{C,h}+u_{C,p}=K\cdot e^{-2t}+10$;

$u_C(0)=K+10=0\ \Rightarrow K=-10$; $u_C(t)=10\cdot\left(1-e^{-2t}\right)$ in Volt.

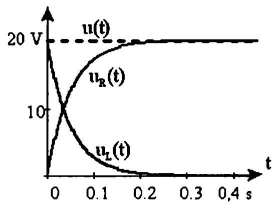


$q=C\cdot u_C$; $i=dq/dt=C\cdot du_C/dt=5\cdot10^{-5}\cdot10\cdot2\cdot e^{-2t}=0{,}001\cdot e^{-2t}$ in Ampere;

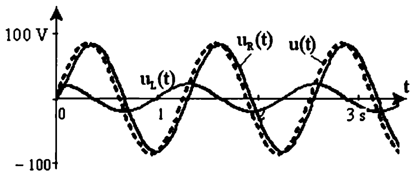
$u_R=R\cdot i=10000\cdot0{,}001\cdot e^{-2\cdot t}=10\cdot e^{-2\cdot t}$ in Volt. Probe: $u_R+u_C=u=10$ V

4.38 $R\cdot i+L\cdot\frac{di}{dt}=u$; $R=10\ \Omega$; $L=0{,}5$ H; $10\cdot i+\frac{1}{2}\cdot\frac{di}{dt}=u$ oder $\frac{di}{dt}+20\cdot i=2u$; Anf. bed.: $i(0)=0$.

a) $u(t)=20$ V; $\frac{di}{dt}+20\cdot i=40$; $i_h=K\cdot e^{-20t}$ (K als Integrations-konstante); Ansatz: $i_p=a$; Einsetzen: $0+20\cdot a=40\ \Rightarrow\ a=2$;
$i_p=2$; $i(t)=i_h+i_p=K\cdot e^{-20t}+2$; $i(0)=K+2=0\ \Rightarrow\ K=-2$;
gesuchte part. Lös: $i(t)=2\cdot\left(1-e^{-20t}\right)$ in Ampere.
$u_R(t)=R\cdot i(t)=20\cdot\left(1-e^{-20\cdot t}\right)$ in Volt;
$u_L(t)=L\cdot\frac{di}{dt}=20\cdot e^{-20\cdot t}$ in Volt. Probe: $u_R+u_L=u$



b) $u(t)=85\ \text{V}\cdot\sin(5t)$; $\frac{di}{dt}+20\cdot i=170\cdot\sin(5t)$;
$i_h=K\cdot e^{-20t}$ (K als Integrationskonstante);
Ansatz: $i_p=a\cdot\sin(5t)+b\cdot\cos(5t)$; Einsetzen:
$5a\cdot\cos(5t)-5b\cdot\sin(5t)+20a\cdot\sin(5t)+20b\cdot\cos(5t)=$
$=170\cdot\sin(5t)\ \Rightarrow\ a=8;\ \ b=-2;$



$i(t)=i_h+i_p=K\cdot e^{-20t}+8\cdot\sin(5t)-2\cdot\cos(5t)$; $i(0)=K-2=0\ \Rightarrow\ K=2$.

$i(t)=2\cdot e^{-20t}+8\cdot\sin(5t)-2\cdot\cos(5t)=2\cdot e^{-20t}+8{,}25\cdot\sin(5t-14{,}0°)$ in Ampere;

$u_R(t)=R\cdot i(t)=82{,}5\cdot\sin(5t-14{,}0°)+20\cdot e^{-20\cdot t}$ in Volt;

$u_L(t)=L\cdot\frac{di}{dt}=0{,}5\cdot\left(8{,}25\cdot5\cdot\cos(5t-14{,}0°)-2\cdot(-20)\cdot e^{-20t}\right)$; wegen $\cos\alpha=\sin(90-\alpha)$ folgt:

$u_L(t)=20{,}6\cdot\sin(5t+76{,}0°)-20\cdot e^{-20t}$ in Volt.

Stichprobe durch Einsetzen eines Wertes für t: $u_R(t)+u_L(t)=u=85\cdot\sin(5t)$.
Für eine echte Probe siehe *Überlagerung gleichfrequenter Sinusschwingungen im Zeigerdiagramm*, „Ingenieur–Mathematik 2“, Seite 157 f.

4.39 **a)** linear, konstante Koeffizienten, inhomogen
b) linear, konstante Koeffizienten, homogen
c) linear, nicht konstante Koeffizienten (Koeffizient von y‘ ist nicht konstant), inhomogen
d) nicht linear wegen des Gliedes $y\cdot y'$, inhomogen
e) linear, nicht konstante Koeffizienten (Koeffizient von y ist nicht konstant), inhomogen
f) nicht linear wegen des Gliedes y'^2, homogen

4.40 **a)** $y''+y'-2y=0$; Exponentialansatz $y=C\cdot e^{\lambda\cdot x}$; $y'=C\cdot\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x}$; $y''=C\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda\cdot x}$;
Einsetzen: $C\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda\cdot x}+C\cdot\lambda\cdot e^{\lambda\cdot x}-2\cdot C\cdot e^{\lambda\cdot x}=C\cdot e^{\lambda\cdot x}\cdot(\lambda^2+\lambda-2)=0$; $\cdot\lambda^2+\lambda-2=0$
(charakteristische Gleichung) $\Rightarrow\ \lambda_1=-2$; $\lambda_2=1$; allgemeine Lösung: $y=C_1\cdot e^{-2x}+C_2\cdot e^{x}$

4.40 b) $3y'' + 4y' + y = 0$; Exponentialansatz $y = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$ führt auf die charakteristische Gleichung $3\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$; ·Lösung: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$; allgemeine Lösung: $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-x/3}$

c) $y'' - 3y' = 0$; charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 3\lambda = \lambda \cdot (\lambda - 3) = 0$; $\cdot\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 3$; allgemeine Lösung: $y = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^{3x} = C_1 + C_2 \cdot e^{3x}$

d) $y'' - 4y = 0$; $\lambda^2 - 4 = (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 2) = 0$; $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 2$; $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{2x}$

e) $y'' = 0$; $\lambda^2 = 0$; $\cdot\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $y = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{0 \cdot x} = C_1 + C_2 \cdot x$;
Lösung auch durch Integration von $y'' = 0$

f) $y'' + 6y' + 9y = 0$; $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$; ·Lösung: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$; $y = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{-3 \cdot x}$

g) $y'' + 2y' = 0$; $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda \cdot (\lambda + 2) = 0$; $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 0$; $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{0 \cdot x} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2$

h) $y'' + y = 0$; $\lambda^2 + 1 = (\lambda + j) \cdot (\lambda - j) = 0$; $\lambda_1 = -j$; $\lambda_2 = j$; $y = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$

i) $y'' + 4y' + 5y = 0$; $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$; $\lambda_1 = -2 + j$; $\lambda_2 = -2 - j$;
$y = C_1 \cdot e^{-2x} \sin x + C_2 \cdot e^{-2x} \cos x = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$

j) $y'' + 6y' + 25y = 0$; $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$; $\lambda_1 = -3 + 4j$; $\lambda_2 = -3 - 4j$;
$y = e^{-3x} \cdot (C_1 \cdot \sin 4x + C_2 \cdot \cos 4x)$

k) $y'' + 10y' + 26y = 0$; $\lambda^2 + 10\lambda + 26 = 0$; $\lambda_1 = -5 + j$; $\lambda_2 = -5 - j$; $y = e^{-5x} \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$

l) $y'' + 4y' + 8y = 0$; $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$; $\lambda_1 = -2 + 2j$; $\lambda_2 = -2 - 2j$; $y = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x)$

4.41 a) $y'' + 6y' + 5y = 0$; $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$; $\lambda_1 = -5$; $\lambda_2 = -1$; allgemeine Lösung: $y = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{-x}$;
Berücksichtigung der Anfangsbedingungen: $y' = -5 \cdot C_1 \cdot e^{-5x} - C_2 \cdot e^{-x}$; $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ und $y'(0) = -5 \cdot C_1 - C_2 = 4 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 1$; $y = e^{-x} - e^{-5x}$

b) $y'' + 8y' + 12y = 0$; $\lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$; $\lambda_1 = -6$; $\lambda_2 = -2$; allgemeine Lösung:
$y = C_1 \cdot e^{-6x} + C_2 \cdot e^{-2x}$; Berücksichtigung der Anfangsbedingungen: $y' = -6 \cdot C_1 \cdot e^{-6x} - 2 \cdot C_2 \cdot e^{-2x}$;
$y(0) = C_1 + C_2 = 10$ und $y'(0) = -6 \cdot C_1 - 2 \cdot C_2 = 8 \Rightarrow C_1 = -7, C_2 = 17$; $y = -7 \cdot e^{-6x} + 17\, e^{-2x}$

c) $y'' + 4y' + 8y = 0$; $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$; $\lambda_1 = -2 + 2j$; $\lambda_2 = -2 - 2j$; allgemeine Lösung:
$y = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x)$; Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:
$y' = -2e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x) + e^{-2x} \cdot (2 \cdot C_1 \cdot \cos 2x - 2 \cdot C_2 \cdot \sin 2x) =$
$= 2e^{-2x} \cdot [-(C_1 + C_2) \cdot \sin 2x + (C_1 - C_2) \cdot \cos 2x]$; $y(0) = C_2 = 1$ und $y'(0) = 2 \cdot (C_1 - C_2) = 0$
$\Rightarrow C_1 = 1$, $y = e^{-2x} \cdot (\sin 2x + \cos 2x)$

d) $y'' + 10y' + 26y = 0$; $\lambda^2 + 10\lambda + 26 = 0$; $\lambda_1 = -5 + j$; $\lambda_2 = -5 - j$; allgemeine Lösung:
$y = e^{-5x} \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$; Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:
$y' = -5e^{-5x} \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x) + e^{-5x} \cdot (C_1 \cdot \cos x - C_2 \cdot \sin x) =$
$= e^{-5x} \cdot [-(5C_1 + C_2) \cdot \sin x + (C_1 - 5C_2) \cdot \cos x]$; $y(0) = C_2 = 0$ und $y'(0) = C_1 - 5C_2 = 2$
$\Rightarrow C_1 = 2$, $y = 2 \cdot e^{-5x} \cdot \sin x$

e) $y'' + 8y' + 20y = 0$; $\lambda^2 + 8\lambda + 20 = 0$; $\lambda_1 = -4 + 2j$; $\lambda_2 = -4 - 2j$; allgemeine Lösung:
$y = e^{-4x} \cdot (C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x)$; Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:
$y' = -4e^{-4x} \cdot (C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x) + e^{-4x} \cdot (2 \cdot C_1 \cdot \cos 2x - 2 \cdot C_2 \cdot \sin 2x) =$
$= 2e^{-4x} \cdot [-(2C_1 + C_2) \cdot \sin 2x + (C_1 - 2C_2) \cdot \cos 2x]$; $y(0) = C_2 = 1$ und $y'(0) = 2 \cdot (C_1 - 2C_2) = 0$
$\Rightarrow C_1 = 2$, $y = e^{-4x} \cdot (2 \cdot \sin 2x + \cos 2x)$

f) $y'' + \omega^2 \cdot y = 0$; $\lambda^2 + \omega^2 = (\lambda + \omega \cdot j)(\lambda - \omega \cdot j) = 0$; $\lambda_1 = \omega j$; $\lambda_2 = \omega \cdot j$; allgemeine Lösung:
$y = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$; Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:
$y' = \omega \cdot C_1 \cdot \cos(\omega x) - \omega \cdot C_2 \cdot \sin(\omega x)$; $y(0) = C_2 = r$ und $y'(0) = \omega \cdot C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$,
$y = r \cdot \cos(\omega \cdot x)$

4.42 **a)** (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 4y' + 3y = 0$: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -1$; $y_h = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $y'' + 4y' + 3y = 6$:
$y_p = a$; $y_p' = 0$; $y_p'' = 0$; Einsetzen: $3 \cdot a = 6$; $\Rightarrow a = 2$; $y_p = 2$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x} + 2$

b) (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 4y' + 3y = 0$: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -1$; $y_h = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung $y'' + 4y' + 3y = 3x + 1$:
$y_p = a \cdot x + b$; $y_p' = a$; $y_p'' = 0$. Einsetzen: $0 + 4a + 3a \cdot x + 3b = 3x + 1$;
Koeffizientenvergleich:
$3a = 3$ und $4a + 3b = 1 \Rightarrow a = 1; b = -1$; $y_p = x - 1$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x} + x - 1$

c) (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 4y' + 3y = 0$: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -1$; $y_h = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomog. Gleichung $y'' + 4y' + 3y = 9x^2 + 6x$:
$y_p = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$; $y_p' = 2a \cdot x + b$; $y_p'' = 2a$.
Einsetzen: $2a + 8a \cdot x + 4b + 3a \cdot x^2 + 3b \cdot x + 3c = 9x^2 + 6x$;
Koeffizientenvergleich:
$3a = 9$ und $8a + 3b = 6$ und $2a + 4b + 3c = 0 \Rightarrow a = 3; b = -6, c = 6$; $y_p = 3x^2 - 6x + 6$

(3) Allgemeine Lösung der inhomog. Gleichung: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x} + 3x^2 - 6x + 6$

d) (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 4y' + 3y = 0$: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -1$; $y_h = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomog. Gleichung $y'' + 4y' + 3y = 12 \cdot e^{-2x}$:
$y_p = a \cdot e^{-2x}$. Einsetzen: $4a \cdot e^{-2x} + 4 \cdot a \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + 3a \cdot e^{-2x} = 12 \cdot e^{-2x}$; $-a \cdot e^{-2x} = 12 \cdot e^{-2x} \Rightarrow a = -12$

(3) Allgemeine Lösung der inhomog. Gleichung: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x} - 12 \cdot e^{-2x}$

e) (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 4y' + 5y = 0$: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -2 + j$; $\lambda_2 = -2 - j$; $y_h = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomog. Gleichung $y'' + 4y' + 5y = 10 \cdot e^{-2x}$:
$y_p = a \cdot e^{-2x}$. Einsetzen: $4a \cdot e^{-2x} + 4 \cdot a \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + 5a \cdot e^{-2x} = 10 \cdot e^{-2x}$; $a \cdot e^{-2x} = 10 \cdot e^{-2x} \Rightarrow a = 10$

(3) Allgemeine Lösung der inhomog. Gleichung: $y = y_h + y_p = (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x + 10) \cdot e^{-2x}$

f) (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 4y' + 8y = 0$: $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -2 + 2j$; $\lambda_2 = -2 - 2j$; $y_h = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin 2x + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 2x = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x)$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomog. Gleichung $y'' + 4y' + 8y = 16x$:
$y_p = a \cdot x + b$. Einsetzen: $0 + 4a + 8a \cdot x + 8b = 16x$;
Koeffizientenvergleich:
$8\,a = 16$ und $4a + 8b = 0 \Rightarrow a = 2,\ b = -1$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gl.: $y = y_h + y_p = (C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x) \cdot e^{-2x} + 2x - 1$

4.42 **g)** (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 6y' + 9y = 0$: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -3$; $y_h = (C_1 + C_2 \cdot x)\, e^{-3x}$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomog. Gleichung $y'' + 6y' + 9y = 169 \sin 2x$:
$y_p = a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x$. Einsetzen:
$-4a \cdot \sin 2x - 4b \cdot \cos 2x + 12a \cdot \cos 2x - 12b \cdot \sin 2x + 9a \cdot \sin 2x + 9b \cdot \cos 2x = 169 \cdot \sin 2x$;
Koeffizientenvergleich: $-4a - 12b + 9a = 169$ und $-4b + 12a + 9b = 0 \Rightarrow a = 5,\ b = -12$;
$y_p = 5 \cdot \sin 2x - 12 \cdot \cos 2x = \sqrt{5^2 + (-12)^2} \cdot \sin(2x + \varphi) = 13 \cdot \sin(2x + \varphi)$ mit
$\tan\varphi = \frac{-12}{5}$ oder $\varphi = -67{,}4°$.

Lösungsvariante: Komplexer Lösungssansatz für y_p (siehe Lehrbuch Seite 157 f., Beispiel 4.21): $\underline{y}_p = \underline{a} \cdot e^{j2x} = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2x}$; $\underline{y}'_p = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot 2j \cdot e^{j2x}$; $\underline{y}''_p = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot (-4) \cdot e^{j2x}$;
Einsetzen: $\hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot (-4) \cdot e^{j2x} + 6 \cdot \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot 2j \cdot e^{j2x} + 9 \cdot \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2x} = 169 \cdot e^{j2x}$;
$\hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2x} \cdot (5 + 12j) = 169 \cdot e^{j2x}$; Division durch e^{j2x} und durch $(5 + 12j)$ ergibt
$\hat{y} \cdot e^{j\varphi} = \frac{169}{5+12j} = \frac{169 \cdot (5-12j)}{25+144} = 5 - 12j = \sqrt{5^2 + 12^2} \cdot e^{j\varphi} = 13 \cdot e^{j\varphi}$ mit $\tan\varphi = -\frac{12}{5}$ oder
$\varphi = -67{,}4°$; $\underline{y}_p = 13 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j2x} = 13 \cdot e^{j(2x+\varphi)} = 13 \cdot [\cos(2x + \varphi) + j \cdot \sin(2x + \varphi)]$; der Imaginärteil von $\underline{y}_p$ ist die gesuchte partikuläre Lösung: $y_p = 13 \cdot \sin(2x + \varphi)$.

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gl.: $y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 \cdot x)\, e^{-3x} + 5 \cdot \sin 2x - 12 \cdot \cos 2x$

h) (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 2y' + 17y = 0$: $\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -1 + 4j$, $\lambda_2 = -1 - 4j$; $y_h = e^{-x} \cdot (C_1 \cdot \sin 4x + C_2 \cdot \cos 4x)$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomog. Gleichung $y'' + 2y' + 17y = 50 \cos 3x$:
$y_p = a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x$. Einsetzen:
$-9a \cdot \sin 3x - 9b \cdot \cos 3x + 6a \cdot \cos 2x - 6b \cdot \sin 3x + 17a \cdot \sin 3x + 17b \cdot \cos 3x = 50 \cdot \cos 3x$;
Koeffizientenvergleich:
$-9a - 6b + 17a = 0$ und $-9b + 6a + 17b = 50 \Rightarrow a = 3,\ b = 4$; $y_p = 3 \cdot \sin 3x + 4 \cdot \cos 3x$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gl.: $y = y_h + y_p = e^{-x} \cdot (C_1 \cdot \sin 4x + C_2 \cdot \cos 4x) + 3 \cdot \sin 3x + 4 \cdot \cos 3x$

i) (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 4y' + 20y = 0$: $\lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -2 + 4j$, $\lambda_2 = -2 - 4j$; $y_h = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin 4x + C_2 \cdot \cos 4x)$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomog. Gleichung $y'' + 4y' + 20y = 68 \sin 4x$:
$y_p = a \cdot \sin 4x + b \cdot \cos 4x$. Einsetzen:
$-16a \cdot \sin 4x - 16b \cdot \cos 4x + 16a \cdot \cos 4x - 16b \cdot \sin 4x + 20a \cdot \sin 4x + 20b \cdot \cos 4x = 68 \cdot \sin 4x$;
Koeffizientenvergleich:
$-16a - 16b + 20a = 68$ und $-16b + 16a + 20b = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = -4$; $y_p = \sin 4x - 4 \cdot \cos 4x$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gl.: $y = y_h + y_p = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin 4x + C_2 \cdot \cos 4x) + \sin 4x - 4 \cdot \cos 4x$

j) (1) Allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung $y'' + 9y = 0$: $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = 3j$, $\lambda_2 = -3j$; $y_h = C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \sin 3x$

(2) Ansatz für eine partikuläre Lösung y_p der inhomog. Gleichung $y'' + 9y = 18 \cos 3x$:
$y_p = x \cdot (a \cdot \sin 3x + b \cdot \cos 3x)$, da $j \cdot \omega = 3j$ Lösung der charakteristischen Gleichung!
Einsetzen:
$(6a - 9b \cdot x) \cdot \cos 3x + (-9a \cdot x - 6b) \cdot \sin 3x + 9a \cdot x \cdot \sin 3x + 9b \cdot x \cdot \cos 3x = 18 \cdot \cos 3x$ oder
$6a \cdot \cos 3x - 6b \cdot \sin 3x = 18 \cdot \cos 3x$; Koeffizientenvergleich:
$6a = 18$ und $6b = 0 \Rightarrow a = 3,\ b = 0$; $y_p = 3x \cdot \sin 3x$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gl.: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \sin 3x + 3x \cdot \sin 3x$

4.43 **a)** frei, ungedämpft; $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3j; \lambda_2 = -3j;\; y = y_h = C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t$

b) erzwungen, ungedämpft

(1) $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3j; \lambda_2 = -3j;\; y_h = C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t$

(2) $y_p = a;\; 0 + 9 \cdot a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{3};\; y_p = \frac{1}{3}$

(3) $y = y_h + y_p = C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t + \frac{1}{3}$

c) frei, gedämpft; $\lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 + 6j;\; \lambda_2 = -2 - 6j;\; y = e^{-2t} \cdot (C_1 \cdot \sin 6t + C_2 \cdot \cos 6t)$

d) erzwungen, gedämpft;

(1) $\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 + 3j;\; \lambda_2 = -4 - 3j;\; y_h = e^{-4t} \cdot (C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t)$

(2) $y_p = a \cdot t + b;\; 0 + 8 \cdot a + 25 \cdot (a \cdot t + b) = 625 \cdot t;\; 8a + 25a \cdot t + 25 \cdot b = 625 \cdot t;$

$8a + 25\,b = 0$ und $25a = 625 \Rightarrow a = 25; b = -8,\; y_p = 25t - 8$

(3 $y = y_h + y_p = e^{-4t} \cdot (C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t) + 25t - 8$

e) erzwungen, gedämpft;

(1) $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + 3j;\; \lambda_2 = -1 - 3j;\; y_h = e^{-t} \cdot (C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t)$

(2) $y_p = a \cdot \sin t + b \cdot \cos t;\; y_p' = a \cdot \cos t - b \cdot \sin t;\; y_p'' = -a \cdot \sin t - b \cdot \cos t;$

$-a \cdot \sin t - b \cdot \cos t + 2a \cdot \cos t - 2b \cdot \sin t + 10a \cdot \sin t + 10b \cdot \cos t = 85 \cdot \sin t;$

$-a - 2b + 10a = 85$ und $-b + 2a + 10\,b = 0 \Rightarrow a = 9, b = -2;$

$y_p = 9 \cdot \sin t - 2 \cdot \cos t = \sqrt{9^2 + (-2)^2} \cdot \sin(t + \varphi)$ mit $\tan\varphi = \frac{-2}{9}$ oder $\varphi = -12{,}5°$.

Lösungsvariante: $\underline{y}_p = \underline{a} \cdot e^{j \cdot t} = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j \cdot t};\; \underline{y}'_p = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot j \cdot e^{j \cdot t};\; \underline{y}''_p = \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot (-1) \cdot e^{j \cdot t};$

Einsetzen: $\hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot (-1) \cdot e^{j \cdot t} + 2 \cdot \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot j \cdot e^{j \cdot t} + 10 \cdot \hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j \cdot t} = 85 \cdot e^{j \cdot t};$

$\hat{y} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j \cdot t} \cdot (9 + 2j) = 85 \cdot e^{j \cdot t}$; Division durch $e^{j \cdot t}$ und durch $(9 + 2j)$ ergibt

$\hat{y} \cdot e^{j\varphi} = \frac{85}{9+2j} = \frac{85 \cdot (9-2j)}{81+4} = 9 - 2j = \sqrt{9^2 + (-2)^2} \cdot e^{j\varphi} = \sqrt{85} \cdot e^{j\varphi}$ mit $\tan\varphi = \frac{-2}{9}$ oder

$\varphi = -12{,}5°;\; \underline{y}_p = \sqrt{85} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j \cdot t} = 13 \cdot e^{j \cdot (t+\varphi)} = \sqrt{85} \cdot [\cos(t + \varphi) + j \cdot \sin(t + \varphi)]$; der Imaginaärteil

von $\underline{y}_p$ ist die gesuchte partikuläre Lösung: $y_p = \sqrt{85} \cdot \sin(t - 12{,}5°)$.

(3) $y = y_h + y_p = e^{-t} \cdot (C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t) + 9 \cdot \sin t - 2 \cdot \cos t =$

$= e^{-t} \cdot (C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t) + \sqrt{85} \cdot \sin(t - 12{,}5°)$

f) erzwungen, ungedämpft

(1) $\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4j;\; \lambda_2 = -4j;\; y_h = (C_1 \cdot \sin 4t + C_2 \cdot \cos 4t)$

(2) $y_p = a \cdot \sin 3t + b \cdot \cos 3t;\; y_p' = 3a \cdot \cos 3t - 3b \cdot \sin 3t;\; y_p'' = -9a \cdot \sin 3t - 9b \cdot \cos 3t;$

$-9a \cdot \sin 3t - 9b \cdot \cos 3t + 16a \cdot \sin 3t + 16b \cdot \cos 3t = 14 \cdot \sin 3t;$

$-9a + 16a = 14$ und $-9b + 16\,b = 0 \Rightarrow a = 2, b = 0;$

(3) $y = y_h + y_p = C_1 \cdot \sin 4t + C_2 \cdot \cos 4t + 2\sin 3t$

4.44 $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 \cdot y = 0;\; D = \frac{\delta}{\omega_0}$

a) $\delta = 2\,s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{64}\,s^{-1} = 8\,s^{-1}$, $D = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow$ Schwingfall

b) $\delta = 7\,s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{36}\,s^{-1} = 6\,s^{-1}$, $D = \frac{7}{6} > 1 \Rightarrow$ Kriechfall

c) $\delta = 3\,s^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{9}\,s^{-1} = 3\,s^{-1}$, $D = 1 \Rightarrow$ aperiodischer Grenzfall

4.45 $\frac{d^2y}{dt^2}+2\delta\cdot\frac{dy}{dt}+\omega_0^2\cdot y=0$; $p = 2\delta$; für den aperiodischen Grenzfall muss D gleich 1 sein:

$D=\frac{\delta}{\omega_0}=\frac{p}{2\omega_0}=1 \Rightarrow p=2\omega_0$; $p=2\cdot\sqrt{4}=4$; $\ddot{y}+4\dot{y}+4y=0$; $\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-2$;

$y_h = (C_1 + C_2\cdot t)\cdot e^{-2t}$

a) $y(0) = 0$; $\dot{y}(0)=1$; $\dot{y}=(-2C_1+C_2-2C_2\cdot t)\cdot e^{-2t}$;

$y(0) = C_1 = 0$;

$\dot{y}(0)=-2C_1+C_2=1 \Rightarrow C_2 = 1$; $y = t\cdot e^{-2t}$;

Untersuchung der Funktion $y(t) = t\cdot e^{-2t}$ für $t \geq 0$:

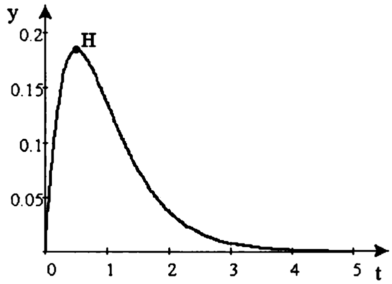
Nullstelle(n): $y = 0$ für $t = 0$;

Extrema: $\dot{y}=(1-2\cdot t)\cdot e^{-2t}$; $\ddot{y}=(4t-4)\cdot e^{-2t}$;

$\dot{y}=(1-2\cdot t)\cdot e^{-2t}=0 \Rightarrow 1-2t=0$ oder $t=0{,}5$;

$\ddot{y}(0{,}5)=(2-4)\cdot e^{-2\cdot 0{,}5}<0 \Rightarrow t=0{,}5$ ist Max.stelle;

$y(0{,}5) = 0{,}184$; $H(0{,}5/0{,}184)$



b) $y(0) = 1$; $\dot{y}(0)=0$; $\dot{y}=(-2C_1+C_2-2C_2\cdot t)\cdot e^{-2t}$;

$y(0) = C_1 = 1$;

$\dot{y}(0)=-2C_1+C_2=0 \Rightarrow C_2 = 2$; $y = (2\cdot t + 1)\cdot e^{-2t}$;

Untersuchung der Funktion $y(t) = (2t + 1)\cdot e^{-2t}$ für $t \geq 0$:

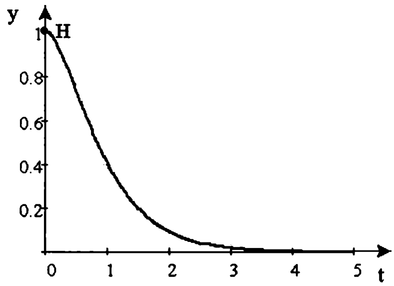
Nullstelle(n): $y = 0$ für $t = -0{,}5$; nicht im Def. bereich, daher keine Nullstelle.

Extrema: $\dot{y}=-4\cdot t\cdot e^{-2t}$; $\ddot{y}=(8t-4)\cdot e^{-2t}$;

$\dot{y}=-4\cdot t\cdot e^{-2t}=0 \Rightarrow t=0$;

$\ddot{y}(0)=(-4)\cdot e^{-2\cdot 0}<0 \Rightarrow t=0$ ist Maximumstelle;

$y(0) = 1$; $H(0/1)$



b) $y(0) = 1$; $\dot{y}(0)=-4$; $\dot{y}=(-2C_1+C_2-2C_2\cdot t)\cdot e^{-2t}$;

$y(0) = C_1 = 1$;

$\dot{y}(0)=-2C_1+C_2=-4 \Rightarrow C_2 = -2$; $y = (1 - 2\cdot t)\cdot e^{-2t}$;

Untersuchung der Funktion $y(t) = (1-2t)\cdot e^{-2t}$ für $t \geq 0$:

Nullstelle(n): $y = 0$ für $t = 0{,}5$;

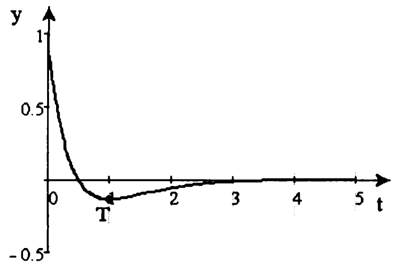
Extrema: $\dot{y}=(4\cdot t-4)\cdot e^{-2t}$; $\ddot{y}=(12-8t)\cdot e^{-2t}$;

$\dot{y}=(4\cdot t-4)\cdot e^{-2t}=0 \Rightarrow 4t-4=0; t=1$;

$\ddot{y}(1)=(12-8)\cdot e^{-2\cdot 1}>0 \Rightarrow t=1$ ist Minimumstelle;

$y(1) = -0{,}135$; $T(1/-0{,}135)$.

Vergleich mit b): Auf Grund der höheren Anfangsgeschwindigkeit $\dot{y}(0)$ ergibt sich nun eine Auslenkung über die Mittellage $y = 0$ hinaus.



4.46 Schwingung, wenn $D < 1$: $D=\frac{b}{2\cdot\sqrt{c\cdot m}}=\frac{b}{2\cdot\sqrt{0{,}1\cdot 10}}=\frac{b}{2}<1 \Rightarrow b<2$

4.47 Die Schwingungen sind frei und gedämpft;

a) $\lambda^2 + 4\lambda + 85 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 + 9j$; $\lambda_2 = -2 - 9j$; $y = e^{-2t}\cdot(C_1\cdot\sin 9t + C_2\cdot\cos 9t)$, Schwingfall

$\dot{y}(t) = e^{-2t}\cdot[-(2C_1 + 9C_2)\cdot\sin 9t + (9C_1 - 2C_2)\cdot\cos 9t]$;

$y(0) = e^0\cdot(C_1\cdot\sin 0 + C_2\cdot\cos 0) = C_2 = 0$;

$\dot{y}(0)= e^0\cdot[-(2C_1 + 9C_2)\cdot\sin 0 + (9C_1 - 2C_2)\cdot\cos 0] = 9C_1 - 2C_2 = 9 \Rightarrow C_1 = 1$;

$y(t) = e^{-2t}\cdot\sin 9t$

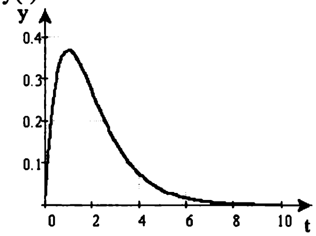
4.47 **b)** $\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -7;\ \lambda_2 = -1;\ y = C_1 \cdot e^{-7t} + C_2 \cdot e^{-t}$; Kriechfall
$\dot{y}(t) = -7 \cdot C_1 \cdot e^{-7t} - C_2 \cdot e^{-t};\ y(0) = C_1 + C_2 = 6;\ \dot{y}(0) = -7 \cdot C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -1;\ C_2 = 7;$
$y(t) = 7 \cdot e^{-t} - e^{-7t}$

c) $\lambda^2 + 8\lambda + 160 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 + 12j;\ \lambda_2 = -4 - 12j;\ y = e^{-4t} \cdot (C_1 \cdot \sin 12t + C_2 \cdot \cos 12t)$, Schwingfall
$\dot{y}(t) = 4e^{-4t} \cdot [-(C_1 + 3C_2) \cdot \sin 12t + (3C_1 - C_2) \cdot \cos 12t];\ y(0) = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) = C_2 = 3;$
$\dot{y}(0) = 4 \cdot 1 \cdot [-(C_1 + 3C_2) \cdot 0 + (3C_1 - C_2) \cdot 1] = 12 \cdot C_1 - 4 \cdot C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 1;$
$y = e^{-4t} \cdot (\sin 12t + 3 \cdot \cos 12t) = \sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sin(12t + \varphi) = \sqrt{10} \cdot \sin(12t + \varphi)$ mit $\varphi = \arctan\frac{3}{1} = 71{,}6°$

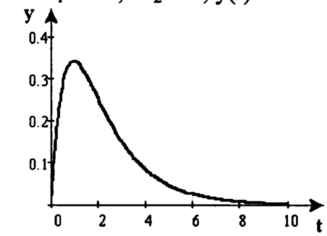
d) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -1;\ y = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-t}$; Kriechfall
$\dot{y}(t) = -2 \cdot C_1 \cdot e^{-7t} - C_2 \cdot e^{-t};\ y(0) = C_1 + C_2 = 1;\ \dot{y}(0) = -2 \cdot C_1 - C_2 = -4 \Rightarrow C_1 = 3;\ C_2 = -2;$
$y(t) = 3 \cdot e^{-2t} - 2 \cdot e^{-t}$

4.48 $b = 2$: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$; aperiodischer Grenzfall;
$y = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-t}$; $\dot{y}(t) = (-C_1 + C_2 - C_2 \cdot t) \cdot e^{-t}$
$b = \sqrt{5} \approx 2{,}24$: $\lambda^2 + \sqrt{5} \cdot \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1{,}618;\ \lambda_2 = -0{,}618$; Kriechfall;
$y = C_1 \cdot e^{-1{,}618 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-0{,}618}$; $\dot{y}(t) = -1{,}618 \cdot C_1 \cdot e^{-1{,}618 \cdot t} - 0{,}618\ C_2 \cdot e^{-0{,}618}$

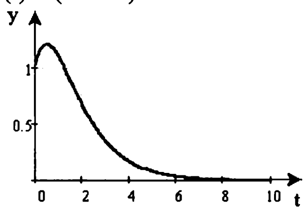
a) **$b = 2$:** $y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 1 = C_1 = 0$;
$\dot{y}(0) = (-C_1 + C_2 - C_2 \cdot 0) \cdot 1 = 1 \Rightarrow C_2 = 1;$
$y(t) = t \cdot e^{-t}$



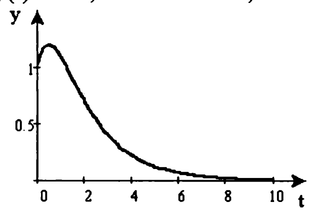
$b = \sqrt{5} \approx 2{,}24$: $y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2 = 0;$
$\dot{y}(0) = -1{,}618 \cdot C_1 \cdot 1 - 0{,}618\ C_2 \cdot 1 = 1$
$\Rightarrow C_1 = -1;\ C_2 = 1;\ y(t) = -e^{-1{,}618 \cdot t} + e^{-0{,}618}$



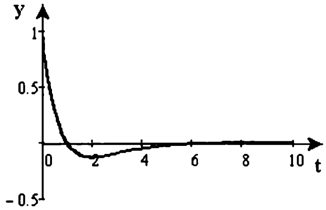
b) **$b = 2$:** $y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 1 = C_1 = 1$;
$\dot{y}(0) = (-C_1 + C_2 - C_2 \cdot 0) \cdot 1 = 1 \Rightarrow C_2 = 2;$
$y(t) = (1 + 2 \cdot t) \cdot e^{-t}$



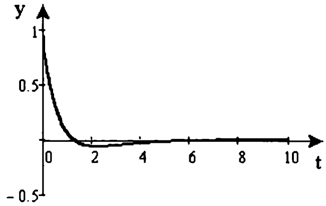
$b = \sqrt{5} \approx 2{,}24$: $y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2 = 1;$
$\dot{y}(0) = -1{,}618 \cdot C_1 \cdot 1 - 0{,}618\ C_2 \cdot 1 = 1$
$\Rightarrow C_1 = -1{,}618;\ C_2 = 2{,}618;$
$y(t) = -1{,}618 \cdot e^{-1{,}618 \cdot t} + 2{,}618 \cdot e^{-0{,}618}$



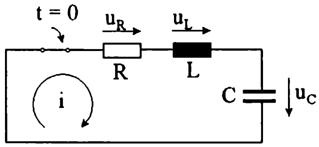
c) **$b = 2$:** $y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 1 = C_1 = 1$;
$\dot{y}(0) = (-C_1 + C_2 - C_2 \cdot 0) \cdot 1 = -2$
$\Rightarrow C_2 = -1;$
$y(t) = (1 - t) \cdot e^{-t}$



$b = \sqrt{5} \approx 2{,}24$: $y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2 = 1;$
$\dot{y}(0) = -1{,}618 \cdot C_1 \cdot 1 - 0{,}618\ C_2 \cdot 1 = -2$
$\Rightarrow C_1 = 1{,}382;\ C_2 = -0{,}382;$
$y(t) = 1{,}382 \cdot e^{-1{,}618 \cdot t} - 0{,}382 \cdot e^{-0{,}618}$



4.49 a) Der Schalter werde zur Zeit t = 0 geschlossen (nach erfolgter Aufladung des Kondensators). Der Strom beginnt von der anfänglich positiven Kondensatorplatte zur negativen zu fließen. Die Stromrichtung und damit die Richtung von u_C ist gegensätzlich zur Spannungsrichtung der anfänglichen Aufladung.



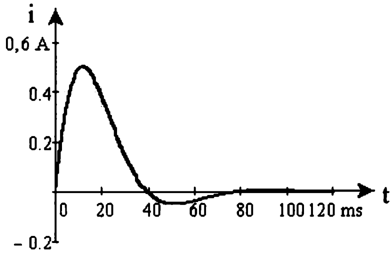
Maschenregel (2. Kirchhoff'sche Regel): $u_R + u_L + u_C = 0$;
$u_R = R \cdot i$; $u_L = L \cdot di/dt$; $u_C = q/C$. Um eine Differentialgleichung für i zu erhalten, wird die Gleichung $u_R + u_L + u_C = 0$ abgeleitet. Unter Verwendung von $i = dq/dt$ ergibt sich

$L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0$ oder für R, L und C eingesetzt: $\frac{d^2i}{dt^2} + 120 \cdot \frac{di}{dt} + 10000 \cdot i = 0$.

Die Anfangsbedingungen sind sorgfältig zu überlegen: $i(0) = 0$; Maschenregel zur Zeit t = 0:

$R \cdot i(0) + L \cdot \frac{di}{dt}(0) + u_C(0) = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt}(0) = -\frac{1}{L} \cdot u_C(0)$; da $u_C(0) = -200$, folgt $\frac{di}{dt}(0) = 100$.

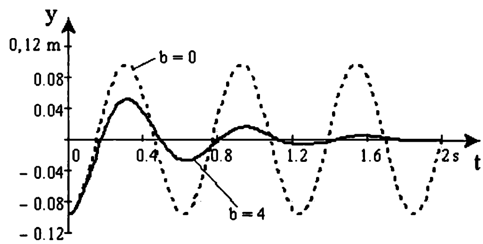
Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 120\lambda + 10000 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -60 + 80j$; $\lambda_2 = -60 - 80j$;
$i(t) = e^{-60t} \cdot (C_1 \cdot \sin 80t + C_2 \cdot \cos 80t)$; Anfangsbedin.:
$i(0) = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$;
$di/dt = 20 \cdot e^{-60t} \cdot [(-3C_1 + 4C_2) \cdot \sin 80t + (4C_1 - 3C_2) \cdot \cos 80t]$;
$di/dt(0) = 20 \cdot 1 \cdot [(-3C_1 + 4C_2) \cdot 0 + (4C_1 - 3C_2) \cdot 1] =$
$= 20 \cdot (4C_1 - 3C_2) = 100 \Rightarrow C_1 = 1{,}25$;
$i(t) = 1{,}25 \cdot e^{-60t} \cdot \sin 80t$ in Ampere



b) Für einen Schwingfall muss D < 1 sein. $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}} = R \cdot \frac{1}{400} < 1 \Rightarrow R < 400\,\Omega$

4.50 Nach dem Wegfallen der zweiten Masse liegt eine freie Schwingung $m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y = 0$ des Systems vor. Durch das anfängliche Dazuhängen einer zweiten Masse m wirkt die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ auf das System. Die Feder dehnt sich dadurch aus ihrer Gleichgewichtslage (y = 0) um die Länge s nach unten aus. Dabei gilt: $m \cdot g = c \cdot s$; daraus $s = m \cdot g/c = 10/104 \approx 9{,}6$ cm. Daher ist die Anfangsauslenkung für die Schwingung: $y(0) = -10/104$; das negative Vorzeichen deshalb, weil wir die y–Achse nach oben positiv zählen. Weiters gilt für die Anfangsgeschwindigkeit: $\dot{y}(0) = 0$.

a) $\ddot{y} + 104 \cdot y = 0$; $y(0) = -\frac{10}{104}$, $\dot{y}(0) = 0$:
charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 104 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = j \cdot \sqrt{104}$; $\lambda_2 = -j \cdot \sqrt{104}$; allg. Lösung:
$y(t) = C_1 \cdot \sin(t \cdot \sqrt{104}) + C_2 \cdot \cos(t \cdot \sqrt{104})$;
$\dot{y} = \sqrt{104} \cdot \left[C_1 \cdot \cos(t \cdot \sqrt{104}) - C_2 \cdot \sin(t \cdot \sqrt{104})\right]$;
$y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = -10/104 \Rightarrow C_2 = -5/52$;



$\dot{y}(0) = \sqrt{104} \cdot [C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 0] = 0 \Rightarrow C_1 = 0$; $y(t) = -\frac{5}{52} \cdot \cos\left(t \cdot \sqrt{104}\right)$ in Meter oder
$y(t) = -9{,}6 \cdot \cos(10{,}2 \cdot t)$ in Zentimeter, t in Sekunden

b) $\ddot{y} + 4 \cdot \dot{y} + 104 \cdot y = 0$; $y(0) = -\frac{10}{104}$, $\dot{y}(0) = 0$:
charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda + 104 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -2 + 10j$; $\lambda_2 = -2 - 10j$;
allg. Lösung: $y(t) = e^{-2t} \cdot [C_1 \cdot \sin(10t) + C_2 \cdot \cos(10t)]$;
$\dot{y} = 2 \cdot e^{-2t}\left[-(C_1 + 5C_2) \cdot \sin(10t) + (5C_1 - C_2) \cdot \cos(10t)\right]$;

TI-nspire CAS:

$\text{deSolve}\left(y''+4 \cdot y'+104 \cdot y=0 \text{ and } y(0)=\frac{-10}{104} \text{ and } y'(0)=0, t, y\right)$

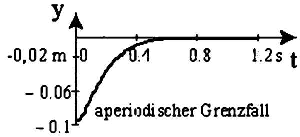
$\text{factor}\left(y=\frac{-5 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \cos(10 \cdot t)}{52} - \frac{e^{-2 \cdot t} \cdot \sin(10 \cdot t)}{52}\right)$

$y=\frac{-e^{-2 \cdot t} \cdot (5 \cdot \cos(10 \cdot t)+\sin(10 \cdot t))}{52}$

$y(0) = 1 \cdot [C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1] = -10/104 \Rightarrow C_2 = -5/52$; $\dot{y} = 2 \cdot 1[-(C_1 + 5C_2) \cdot 0 + (5C_1 - C_2) \cdot 1)] \Rightarrow$
$C_1 = -1/52$; $y(t) = -\frac{1}{52} \cdot e^{-2t} \cdot (\sin 10t + 5 \cdot \cos 10t) = -\frac{\sqrt{26}}{52} \cdot \sin(10t + 78{,}7°)$ in Meter, t in Sekunden

4.50 **c)** Für einen Schwingfall muss D < 1 sein.

$D = \frac{b}{2\sqrt{mc}} = \frac{b}{2\sqrt{104}} < 1 \;\Rightarrow\; b < 2\cdot\sqrt{104} \approx 20{,}4\,\mathrm{kg/s}$. In der Abb. rechts zum Vergleich $b = 2\cdot\sqrt{104}$ (aperiod. Grenzfall).



4.51 $2\cdot\ddot{y} + 80\cdot\dot{y} + 600\cdot y = 0$, $y(0) = 0{,}5$; $\dot{y}(0) = -v_0$ ($v_0 > 0$) wird unbestimmt angesetzt. Eine negative Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, dass die Masse entgegen der y–Richtung, also nach unten, angestoßen wird.

Charakteristische Gleichung: $2\cdot\lambda^2 + 80\lambda + 600 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -30$; $\lambda_2 = -10$; Kriechfall.

Allgemeine Lösung: $y(t) = C_1\cdot e^{-30t} + C_2\cdot e^{-10t}$; Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$\dot{y}(t) = -30\cdot C_1\cdot e^{-30t} - 10\cdot C_2\cdot e^{-10t}$; $y(0) = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 1 = 0{,}5$ und $\dot{y}(0) = -30\cdot C_1\cdot 1 - 10\cdot C_2\cdot 1 = -v_0$

$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{20}\cdot(v_0 - 5)$; $C_2 = \frac{1}{20}\cdot(15 - v_0)$; $y(t) = \left(\frac{v_0}{20} - \frac{1}{4}\right)\cdot e^{-30\cdot t} + \left(\frac{3}{4} - \frac{v_0}{20}\right)\cdot e^{-10\cdot t}$;

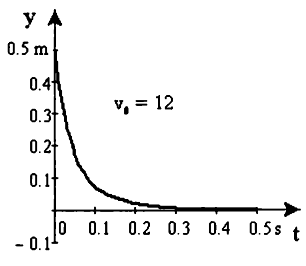
Setzt man y(t) = 0, so ist $\left(\frac{v_0}{20} - \frac{1}{4}\right)\cdot e^{-30\cdot t} + \left(\frac{3}{4} - \frac{v_0}{20}\right)\cdot e^{-10\cdot t} = 0$. Multiplikation dieser Gleichung mit e^{30t} ergibt $\left(\frac{v_0}{20} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{v_0}{20}\right)\cdot e^{-20\cdot t} = 0$ oder $e^{-20t} = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{v_0}{20}}{\frac{3}{4} - \frac{v_0}{20}} = \frac{5 - v_0}{15 - v_0}$; daraus nach Logarithmieren: $-20t\cdot\ln e = \ln\frac{5 - v_0}{15 - v_0}$ oder $t = t_0 = -\frac{1}{20}\cdot\ln\frac{5 - v_0}{15 - v_0} = \frac{1}{20}\cdot\ln\left(\frac{5 - v_0}{15 - v_0}\right)^{-1} = \frac{1}{20}\cdot\ln\frac{v_0 - 5}{v_0 - 15}$;

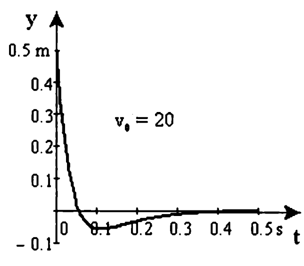
Für $v_0 = 4$ m/s ist $t_0 = -0{,}12$ s. Ist $v_0 = 8$ m/s oder $v_0 = 12$ m/s, so gibt es keine Nullstelle t_0, da $\frac{5 - v_0}{15 - v_0} < 0$ ist und von einem negativen Term kein Logarithmus gebildet werden kann. Ist dagegen $v_0 = 20$ m/s, so ist $t_0 = 0{,}055$ s, ist $v_0 = 16$ m/s, so ist $t_0 = 0{,}120$ s. Allgemeiner:

Für $v_0 < 5$ m/s gibt es eine negative Nullstelle, die aber wegen $t \geq 0$ nicht in Frage kommt.

Für $v_0 \geq 5$ m/s und zugleich $v_0 \leq 15$ m/s gibt es keine Nullstelle.

Erst bei einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 > 15$ m/s kommt es zu einem Nulldurchgang.



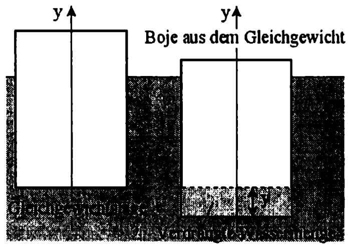


4.52 $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\cdot\varphi = 0$, $\varphi(0) = 0{,}1\,\mathrm{rad} = 5{,}73°$; $\dot{\varphi}(0) = 0$; $\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = j\cdot\sqrt{g/l}$; $\lambda_2 = -j\cdot\sqrt{g/l}$;

allgemeine Lösung: $\varphi(t) = C_1\cdot\sin\left(t\cdot\sqrt{g/l}\right) + C_2\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{g/l}\right)$; Berücksichtigung der Anfangsbedingungen: $\dot{\varphi}(t) = C_1\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right) - C_2\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sin\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$; $\varphi(0) = C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 = 0{,}1 \Rightarrow$

$C_2 = 0{,}1$; $\dot{\varphi}(0) = C_1\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot 1 - C_2\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$; $\varphi(t) = 0{,}1\cdot\cos\left(t\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$.

Wegen $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ folgt $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$.



4.53 $m \cdot \ddot{y} = -\frac{\pi}{4} d^2 \cdot y \cdot \rho \cdot g$; $\ddot{y} + \frac{c}{m} \cdot y = 0$ mit $\frac{c}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \rho \cdot g$;

$\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = j \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$; $\lambda_2 = -j \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$; allgemeine Lösung:

$y(t) = C_1 \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}\right) + C_2 \cdot \cos\left(t \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}\right)$;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{2\pi}{T}$; daraus: $m = c \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \approx 1120\,\text{kg}$.

4.54 $m \cdot \ddot{y} = -\frac{\pi}{4} d^2 \cdot 2y \cdot \rho \cdot g$; $\ddot{y} + \frac{c}{m} \cdot y = 0$ mit $\frac{c}{m} = \frac{2}{m} \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \rho \cdot g$; $\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = j \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$;

$\lambda_2 = -j \cdot \sqrt{\frac{c}{m}}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = d \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \rho \cdot g}{2m}} = 3{,}72\ \text{s}^{-1}$; $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 1{,}7\,\text{s}$

4.55 **a)** (1) $\ddot{y} + 10\dot{y} + 16y = 0$; $\lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -8$; $\lambda_2 = -2$; $y_h = C_1 \cdot e^{-8t} + C_2 \cdot e^{-2t}$

(2) $y_p = a$; $y_p' = y_p'' = 0$; $0 + 10 \cdot 0 + 16a = 48 \Rightarrow a = 3$; $y_p = 3$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-8t} + C_2 \cdot e^{-2t} + 3$

$\dot{y} = -8 \cdot C_1 \cdot e^{-8t} - 2 \cdot C_2 \cdot e^{-2t}$; $y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + 3 = 0$; $\dot{y}(0) = -8 \cdot C_1 \cdot 1 - 2 \cdot C_2 \cdot 1 = 0$; daraus:

$C_1 = 1$; $C_2 = -4$; gesuchte partikuläre Lösung: $y(t) = e^{-8t} - 4 \cdot e^{-2t} + 3$

b) (1) $\ddot{y} + 10\dot{y} + 24y = 0$; $\lambda^2 + 10\lambda + 24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -6$; $\lambda_2 = -4$; $y_h = C_1 \cdot e^{-6t} + C_2 \cdot e^{-4t}$

(2) $y_p = a$; $y_p' = y_p'' = 0$; $0 + 10 \cdot 0 + 24a = 24 \Rightarrow a = 1$; $y_p = 1$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{-6t} + C_2 \cdot e^{-4t} + 1$

$\dot{y} = -6 \cdot C_1 \cdot e^{-6t} - 4 \cdot C_2 \cdot e^{-4t}$; $y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + 1 = 0$; $\dot{y}(0) = -6 \cdot C_1 \cdot 1 - 4 \cdot C_2 \cdot 1 = 0$; daraus:

$C_1 = 2$; $C_2 = -3$; gesuchte partikuläre Lösung: $y(t) = 2e^{-6t} - 3 \cdot e^{-4t} + 1$

c) (1) $\ddot{y} + 10\dot{y} + 25y = 0$; $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -5$; $y_h = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-5t}$

(2) $y_p = a$; $y_p' = y_p'' = 0$; $0 + 10 \cdot 0 + 25a = 25 \Rightarrow a = 1$; $y_p = 1$

(3) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-5t} + 1$

$\dot{y} = (-5 \cdot C_1 + C_2 - 5C_2 \cdot t)\, e^{-5t}$; $y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1$;

$\dot{y}(0) = (-5 \cdot C_1 + C_2 - 5C_2 \cdot 0)\, 1 = 0 \Rightarrow C_2 = -5$; gesuchte partik. Lösung: $y(t) = -(5t + 1) \cdot e^{-5t} + 1$

d) (1) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 0$; $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 + 3j$; $\lambda_2 = -2 - 3j$;

$y_h = e^{-2t} \cdot (C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t)$

(2) $y_p = a \cdot t + b$; $y_p' = a$; $y_p'' = 0$; $0 + 4a + 13a \cdot t + 13b = 507 + 507t \Rightarrow 4a + 13\,b = 507$ und $13a = 507$; daraus: $a = 39$; $b = 27$; $y_p = 39t + 27$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gl.: $y = y_h + y_p = e^{-2t} \cdot (C_1 \cdot \sin 3t + C_2 \cdot \cos 3t) + 39t + 27$

$\dot{y} = [(-2C_1 + 3C_2) \cdot \sin 3t + (3C_1 - 2C_2) \cdot \cos 3t] \cdot e^{-2t} + 39$;

$y(0) = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) + 39 \cdot 0 + 27 = 0 \Rightarrow C_2 = -27$;

$\dot{y}(0) = [(-2C_1 + 3C_2) \cdot 0 + (3C_1 - 2C_2) \cdot 1] \cdot 1 + 39 = 0 \Rightarrow C_1 = -31$; gesuchte partikuläre Lösung:

$y(t) = -\,e^{-2t} \cdot (31 \cdot \sin 3t + 27 \cdot \cos 3t) + 3 \cdot (13t + 9) = -13 \cdot \sqrt{10} \cdot e^{-2t} \cdot \sin(3t + 41{,}1°) + 3 \cdot (13t + 9)$

e) (1) $\ddot{y} + 14\dot{y} + 49y = 0$; $\lambda^2 + 14\lambda + 49 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -7$; $y_h = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-7t}$

(2) $y_p = a \cdot t + b$; $0 + 14a + 49a \cdot t + 49b = 686 + 1372 \cdot t \Rightarrow a = 28$; $b = 6$; $y_p = 28t + 6$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gleichung: $y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-7t} + 28t + 6$

$\dot{y} = (-7 \cdot C_1 + C_2 - 7C_2 \cdot t)\, e^{-7t} + 28$; $y(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 1 + 28 \cdot 0 + 6 = 0 \Rightarrow C_1 = -6$;

$\dot{y}(0) = (-7 \cdot C_1 + C_2 - 7C_2 \cdot 0)\, 1 + 28 = 0 \Rightarrow C_2 = -70$;

gesuchte partikuläre Lösung: $y(t) = -\,(70 \cdot t + 6) \cdot e^{-7t} + 28t + 6$

4.55 **f)** (1) $\ddot{y}+8\dot{y}+16y=0$; $\lambda^2+8\lambda+16=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-4$; $y_h=(C_1+C_2\cdot t)\cdot e^{-4t}$

(2) $y_p=a\cdot t+b$; $0+8a+16a\cdot t+16b=32\cdot t \Rightarrow a=2$; $b=-1$; $y_p=2t-1$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gleichung: $y=y_h+y_p=(C_1+C_2\cdot t)\cdot e^{-4t}+2t-1$

$\dot{y}=(-4\cdot C_1+C_2-4\cdot C_2\cdot t)\,e^{-4t}+2$; $y(0)=(C_1+C_2\cdot 0)\cdot 1+2\cdot 0-1=0 \Rightarrow C_1=1$;

$\dot{y}(0)=(-4\cdot C_1+C_2-4C_2\cdot 0)\cdot 1+2=0 \Rightarrow C_2=2$;

gesuchte partikuläre Lösung: $y(t)=(2\cdot t+1)\cdot e^{-4t}+2t-1$

g) (1) $\ddot{y}+16y=0$; $\lambda^2+16=0 \Rightarrow \lambda_1=4j$; $\lambda_2=-4j$; $y_h=C_1\cdot\sin 4t+C_2\cdot\cos 4t$

(2) $y_p=a\cdot\sin 3t+b\cdot\cos 3t$; $y_p'=3a\cdot\cos 3t-3b\cdot\sin 3t$; $y_p''=-9a\cdot\sin 3t-9b\cdot\cos 3t$;

$-9a\cdot\sin 3t-9b\cdot\cos 3t+16\cdot(a\cdot\sin 3t+b\cdot\cos 3t)=28\cdot\sin 3t$;

$7\cdot a\cdot\sin 3t+7\cdot b\cdot\cos 3t=28\cdot\sin 3t \Rightarrow a=4$; $b=0$; $y_p=4\cdot\sin 3t$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gleichung: $y=y_h+y_p=C_1\cdot\sin 4t+C_2\cdot\cos 4t+4\cdot\sin 3t$

$\dot{y}=4\cdot C_1\cdot\cos 4t-4\cdot C_2\cdot\sin 4t+12\cdot\cos 3t$; $y(0)=C_1\cdot 0+C_2\cdot 1+4\cdot 0=0 \Rightarrow C_2=0$;

$\dot{y}(0)=4\cdot C_1\cdot 1-4\cdot C_2\cdot 0+12\cdot 1=0 \Rightarrow C_1=-3$;

gesuchte partikuläre Lösung: $y(t)=-3\cdot\sin 4t+4\cdot\sin 3t$

h) (1) $\ddot{y}+16y=0$; $\lambda^2+16=0 \Rightarrow \lambda_1=4j$; $\lambda_2=-4j$; $y_h=C_1\cdot\sin 4t+C_2\cdot\cos 4t$

(2) $y_p=t\cdot(a\cdot\sin 4t+b\cdot\cos 4t)$, weil $4j$ Lösung der charakteristischen Gleichung ist;

$y_p'=(a-4b\cdot t)\cdot\sin 4t+(4\,a\cdot t+b)\cdot\cos 4t$; $y_p''=(-16a\cdot t-8b)\cdot\sin 4t+(8a-16b\cdot t)\cdot\cos 4t$;

$(-16a\cdot t-8b)\cdot\sin 4t+(8a-16b\cdot t)\cdot\cos 4t+16\,t\cdot(a\cdot\sin 4t+b\cdot\cos 4t)=32\cdot\sin 4t$ oder

$-8b\cdot\text{sint}\,4t+8a\cdot\cos 4t=32\cdot\sin 4t \Rightarrow a=0$; $b=-4$; $y_p=-4t\cdot\cos 4t$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gleichung: $y=y_h+y_p=C_1\cdot\sin 4t+C_2\cdot\cos 4t-4t\cdot\cos 4t$

$\dot{y}=4\cdot(4t-C_2)\cdot\sin 4t+(4\cdot C_1-4)\cdot\cos 4t$; $y(0)=C_1\cdot 0+C_2\cdot 1-4\cdot 0\cdot 1=0 \Rightarrow C_2=0$;

$\dot{y}(0)=4\cdot(4\cdot 0-C_2)\cdot 0+(4C_1-4)\cdot 1=0 \Rightarrow C_1=1$;

gesuchte partikuläre Lösung: $y(t)=\sin 4t-4t\cdot\cos 4t$

i) (1) $\ddot{y}+8\dot{y}+16y=0$; $\lambda^2+8\lambda+16=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-4$; $y_h=(C_1+C_2\cdot t)\cdot e^{-4t}$

(2) $y_p=a\cdot\sin 4t+b\cdot\cos 4t$; $y_p'=4a\cdot\cos 4t-4b\cdot\sin 4t$; $y_p''=-16a\cdot\sin 4t-16b\cdot\cos 4t$;

$-16a\cdot\sin 4t-16b\cdot\cos 4t-32a\cdot\cos 4t-32b\cdot\sin 4t+16a\cdot\sin 4t+16b\cdot\cos 4t=32\cdot\sin 4t \Rightarrow$

$b=-1$; $a=0$; $y_p=-\cos 4t$

(3) Allg. Lösung d. inhomog. Gleichung: $y=y_h+y_p=(C_1+C_2\cdot t)\cdot e^{-4t}-\cos 4t$

$\dot{y}=(-4\cdot C_2\cdot t-4C_1+C_2)\cdot e^{-4t}+4\cdot\sin 4t$; $y(0)=(C_1+C_2\cdot 0)\cdot 1-1=0 \Rightarrow C_1=1$;

$\dot{y}(0)=(-4\cdot C_2\cdot 0-4C_1+C_2)\cdot 1+4\cdot 0=0 \Rightarrow C_2=4$; ges. part. Lösung: $y(t)=(4t+1)\cdot e^{-4t}-\cos 4t$

4.56 Hier genügt es, die von den Anfangsbedingungen unabhängige partikuläre Lösung y_p von $\ddot{y}+4\dot{y}+13y=145\cdot\cos 2t$ aufzusuchen.

a) $y_p=a\cdot\sin 2t+b\cdot\cos 2t$; $y_p'=2a\cdot\cos 2t-2b\cdot\sin 2t$; $y_p''=-4a\cdot\sin 2t-4b\cdot\cos 2t$;

$-4a\cdot\sin 2t-4b\cdot\cos 2t+4\cdot(2a\cdot\cos 2t-2b\cdot\sin 2t)+13\cdot(a\cdot\sin 2t+b\cdot\cos 2t)=145\cdot\cos 2t$;

$-4a-8b+13a=0$ und $-4b+8a+13b=145 \Rightarrow a=8$; $b=9$;

$y=y_p=8\cdot\sin 2t+9\cdot\cos 2t=\sqrt{8^2+9^2}\cdot\sin(2t+\varphi)=\sqrt{145}\cdot\sin(2t+\varphi)$, $\varphi=\arctan\frac{9}{8}=48{,}4°$.

Lösungsalternative: $\ddot{y}+4\dot{y}+13y=145\cdot\cos 2t=\sin 145\cdot\sin(2t+\pi/2)$; $\underline{y}_p=\underline{a}\cdot e^{j2t}$;

$\underline{y}_p'=2j\cdot\underline{a}\cdot e^{j2t}$; $\underline{y}_p''=-4\cdot\underline{a}\cdot e^{j2t}$; $-4\cdot\underline{a}\cdot e^{j2t}+4\cdot 2j\cdot\underline{a}\cdot e^{j2t}+13\cdot\underline{a}\cdot e^{j2t}=145\cdot e^{j(2t+\pi/2)}$;

$(9+8j)\cdot\underline{a}\cdot e^{j2t}=145\cdot e^{j2t}\cdot e^{j\pi/2}$; wegen $e^{j\cdot\pi/2}=j$ folgt $\underline{a}=\frac{145\cdot j}{9+8j}=8+9j=\sqrt{145}\cdot e^{j48{,}4°}$;

y_p ist der Imaginärteil von $\underline{y}_p=\sqrt{145}\cdot e^{j48{,}4°}\cdot e^{j2t}$: $y_p=\sqrt{145}\cdot\sin(2t+48{,}4°)$

4.56 **b)** $y_p = a\cdot\sin 3t + b\cdot\cos 3t;\ \ y_p' = 3a\cdot\cos 3t - 3b\cdot\sin 3t;\ \ y_p'' = -9a\cdot\sin 3t - 9b\cdot\cos 3t;$

$-9a\cdot\sin 3t - 9b\cdot\cos 3t + 4\cdot(3a\cdot\cos 3t - 3b\cdot\sin 3t) + 13\cdot(a\cdot\sin 3t + b\cdot\cos 3t) = 40\cdot\cos 3t;$

$-9a - 12b + 13a = 0$ und $-9b + 12a + 13b = 40 \ \Rightarrow\ a = 3;\ b = 1;$

$y = y_p = 3\cdot\sin 3t + \cos 3t = \sqrt{3^2+1^2}\cdot\sin(3t+\varphi) = \sqrt{10}\cdot\sin(3t+18{,}4°)$, $\varphi = \arctan\frac{1}{3} = 18{,}4°.$

c) $y_p = a\cdot\sin t + b\cdot\cos t;\ \ y_p' = a\cdot\cos t - b\cdot\sin t;\ \ y_p'' = -a\cdot\sin t - b\cdot\cos t;$

$-a\cdot\sin t - b\cdot\cos t + 2\cdot(a\cdot\cos t - b\cdot\sin t) + a\cdot\sin t + b\cdot\cos t = 2\cdot\sin t + 2\cdot\cos t;$

$-a - 2b + a = 2$ und $-b + 2a + b = 2 \ \Rightarrow\ a = 1;\ b = -1;$

$y = y_p = \sin t - \cos t = \sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sin(t+\varphi) = \sqrt{2}\cdot\sin(t-45°)$, $\varphi = \arctan\frac{-1}{1} = -45°.$

d) $y_p = a\cdot\sin t + b\cdot\cos t + c\cdot\sin 3t + d\cdot\cos 3t;\ \ y_p' = a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + 3c\cdot\cos 3t - 3d\cdot\sin 3t;$

$y_p'' = -a\cdot\sin t - b\cdot\cos t - 9c\cdot\sin 3t - 9d\cdot\cos 3t;$

$-a\cdot\sin t - b\cdot\cos t - 9c\cdot\sin 3t - 9d\cdot\cos 3t + 4\cdot(a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + 3c\cdot\cos 3t - 3d\cdot\sin 3t) +$

$+ 13\cdot(a\cdot\sin t + b\cdot\cos t + c\cdot\sin 3t + d\cdot\cos 3t) = 40\cdot\sin t + 40\cdot\cos 3t;$

$-a - 4b + 13a = 40$ und $-b + 4a + 13b = 0 \ \Rightarrow\ a = 3;\ b = -1;$

$-9c - 12d + 13c = 0$ und $-9d + 12c + 13d = 40 \ \Rightarrow\ c = 3;\ d = 1;$

$y = y_p = 3\cdot\sin t - \cos t + 3\cdot\sin 3t + \cos 3t = \sqrt{10}\cdot[\sin(t-18{,}4°) + \sin(3t+18{,}4°)]$

e) $y_p = a\cdot\sin t + b\cdot\cos t + c\cdot\sin 2t + d\cdot\cos 2t;\ \ y_p' = a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + 2c\cdot\cos 2t - 2d\cdot\sin 2t;$

$y_p'' = -a\cdot\sin t - b\cdot\cos t - 4c\cdot\sin 2t - 4d\cdot\cos 2t;$

$-a\cdot\sin t - b\cdot\cos t - 4c\cdot\sin 2t - 4d\cdot\cos 2t + 8\cdot(a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + 2c\cdot\cos 2t - 2d\cdot\sin 2t) +$

$+ 16\cdot(a\cdot\sin t + b\cdot\cos t + c\cdot\sin 2t + d\cdot\cos 2t) = 289\cdot\sin t + 100\cdot\sin 2t;$

$-a - 8b + 16a = 289$ und $-b + 8a + 16b = 0 \ \Rightarrow\ a = 15;\ b = -8;$

$-4c - 16d + 16c = 100$ und $-4d + 16c + 16d = 0 \ \Rightarrow\ c = 3;\ d = -4;$

$y = y_p = 15\cdot\sin t - 8\cdot\cos t + 3\cdot\sin 2t - 4\cdot\cos 2t = 17\cdot\sin(t - 28{,}1°) + 5\cdot\sin(2t - 53{,}1°)$

f) $y_p = a\cdot\sin t + b\cdot\cos t + c\cdot\sin 2t + d\cdot\cos 2t;\ \ y_p' = a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + 2c\cdot\cos 2t - 2d\cdot\sin 2t;$

$y_p'' = -a\cdot\sin t - b\cdot\cos t - 4c\cdot\sin 2t - 4d\cdot\cos 2t;$

$-a\cdot\sin t - b\cdot\cos t - 4c\cdot\sin 2t - 4d\cdot\cos 2t + 8\cdot(a\cdot\cos t - b\cdot\sin t + 2c\cdot\cos 2t - 2d\cdot\sin 2t) +$

$+ 16\cdot(a\cdot\sin t + b\cdot\cos t + c\cdot\sin 2t + d\cdot\cos 2t) = 289\cdot\cos + 100\cdot\sin 2t;$

$-a - 8b + 16a = 0$ und $-b + 8a + 16b = 289 \ \Rightarrow\ a = 8;\ b = 15;$

$-4c - 16d + 16c = 100$ und $-4d + 16c + 16d = 0 \ \Rightarrow\ c = 3;\ d = -4;$

$y = y_p = 8\cdot\sin t + 15\cdot\cos t + 3\cdot\sin 2t - 4\cdot\cos 2t = 17\cdot\sin(t + 61{,}9°) + 5\cdot\sin(2t - 53{,}1°)$

4.57 $\ddot y + \frac{b}{m}\cdot\dot y + \frac{c}{m}\cdot y = \frac{F(t)}{m};\ \ \ddot y + 2\delta\cdot\dot y + \omega_0^2\cdot y = \frac{F}{m};\ \ \ddot y + 2D\omega_0\cdot\dot y + \omega_0^2\cdot y = \frac{F}{m};\ \ y(0) = 0,\ \dot y(0) = 0$

a) $D = \frac{3}{5}$, Schwingfall: $\ddot y + 30\cdot\dot y + 625\cdot y = 200;\ y(0) = 0,\ \dot y(0) = 0$

(1) $\ddot y + 30\cdot\dot y + 625\cdot y = 0;\ \lambda^2 + 30\lambda + 625 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -15 + 20j;\ \lambda_2 = -15 - 20j;$

$y_h = e^{-15t}\cdot(C_1\cdot\sin 20t + C_2\cdot\cos 20t)$

(2) $y_p = a;\ y_p' = 0;\ y_p'' = 0;\ 0 + 30\cdot 0 + 625\cdot a = 200 \ \Rightarrow\ a = 8/25 = 0{,}32$

(3) $y = y_h + y_p = e^{-15t}\cdot(C_1\cdot\sin 20t + C_2\cdot\cos 20t) + 8/25$

$y' = 5\cdot e^{-15t}\cdot[-(3C_1 + 4C_2)\cdot\sin 20t + (4C_1 - 3C_2)\cdot\cos 20t];$

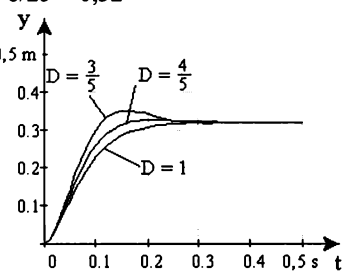
$y(0) = 1\cdot(C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1) + 8/25 = 0 \ \Rightarrow\ C_2 = -8/25 = -0{,}32;$

$\dot y(0) = 5\cdot 1\cdot[-(3C_1 + 4C_2)\cdot 0 + (4C_1 - 3C_2)\cdot 1] = 0$

$\Rightarrow\ C_1 = -6/25 = -0{,}24;$

$y(t) = -(0{,}24\cdot\sin 20t + 0{,}32\cdot\cos 20t)\cdot e^{-15t} + 0{,}32\cdot =$

$= -0{,}40\cdot\sin(20t + 53{,}1°)\cdot e^{-15t} + 0{,}32$ in Meter



4.57 **b)** $D = \frac{4}{5}$, Schwingfall: $\ddot{y} + 40 \cdot \dot{y} + 625 \cdot y = 200$; $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$

(1) $\ddot{y} + 40 \cdot \dot{y} + 625 \cdot y = 0$; $\lambda^2 + 40\lambda + 625 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -20 + 15j$; $\lambda_2 = -20 - 15j$;

$y_h = e^{-20t} \cdot (C_1 \cdot \sin 15t + C_2 \cdot \cos 15t)$

(2) $y_p = a$; $y_p' = 0$; $y_p'' = 0$; $0 + 40 \cdot 0 + 625 \cdot a = 200 \Rightarrow a = 8/25 = 0{,}32$

(3) $y = y_h + y_p = e^{-20t} \cdot (C_1 \cdot \sin 15t + C_2 \cdot \cos 15t) + 8/25$

$y' = 5 \cdot e^{-20t} \cdot [-(4C_1 + 3C_2) \cdot \sin 15t + (3C_1 - 4C_2) \cdot \cos 15t]$;

$y(0) = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) + 8/25 = 0 \Rightarrow C_2 = -8/25 = -0{,}32$;

$\dot{y}(0) = 5 \cdot 1 \cdot [-(4C_1 + 3C_2) \cdot 0 + (3C_1 - 4C_2) \cdot 1] = 0 \Rightarrow C_1 = -32/75 \approx -0{,}43$;

$y(t) = -(0{,}43 \cdot \sin 15t + 0{,}32 \cdot \cos 15t) \cdot e^{-20t} + 0{,}32 = -0{,}53 \cdot \sin(15t + 36{,}9°) \cdot e^{-20t} + 0{,}32$ in Meter

c) $D = 1$, aperiodischer Grenzfall: $\ddot{y} + 50 \cdot \dot{y} + 625 \cdot y = 200$; $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$

(1) $\ddot{y} + 50 \cdot \dot{y} + 625 \cdot y = 0$; $\lambda^2 + 50\lambda + 625 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -25$;

$y_h = (C_1 + C_2 \cdot t)\, e^{-25t}$

(2) $y_p = a$; $y_p' = 0$; $y_p'' = 0$; $0 + 50 \cdot 0 + 625 \cdot a = 200 \Rightarrow a = 8/25 = 0{,}32$

(3) $y = y_h + y_p = e^{-25t} \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) + 8/25$

$y' = e^{-25t} \cdot (-25C_1 + C_2 - 25 \cdot C_2 \cdot t)$; $y(0) = 1 \cdot (C_1 - C_2 \cdot 0) + 8/25 = 0 \Rightarrow C_1 = -8/25 = -0{,}32$;

$\dot{y}(0) = 1 \cdot (-25C_1 + C_2 - 25 \cdot C_2 \cdot 0] = 0 \Rightarrow C_2 = -8$; $y(t) = -(8 \cdot t + 0{,}32) \cdot e^{-25t} + 0{,}32$ in Meter

4.58 $\ddot{y} + \frac{b}{m} \cdot \dot{y} + \frac{c}{m} \cdot y = \frac{F(t)}{m}$; $\ddot{y} + 4\dot{y} + 229 \cdot y = 113 \cdot \sin(\omega t)$

a) $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{229} = 15{,}1\,s^{-1}$; $\delta = \frac{b}{2m} = 2\,s^{-1}$; $D = \frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}132$; Schwingfall;

b) $\omega = 15\,s^{-1}$: $\ddot{y} + 4 \cdot \dot{y} + 229 \cdot y = 113 \cdot \sin 15t$. Die stationäre Lösung ist die von den Anfangsbedingungen unabhängige partikuläre Lösung y_p; Ansatz: $y_p = a \cdot \sin 15t + b \cdot \cos 15t$;

$y_p' = 15a \cdot \cos 15t - 15b \cdot \sin 15t$; $y_p'' = -225a \cdot \sin 15t - 225b \cdot \cos 15t$;

$-225a \cdot \sin 15t - 225b \cdot \cos 15t + 4 \cdot (15a \cdot \cos 15t - 15b \cdot \sin 15t) + 229 \cdot (a \cdot \sin 15t + b \cdot \cos 15t) =$

$= 113 \cdot \sin 15t$; $-225a - 60b + 229a = 113$ und $-225b + 60a + 229b = 0 \Rightarrow$

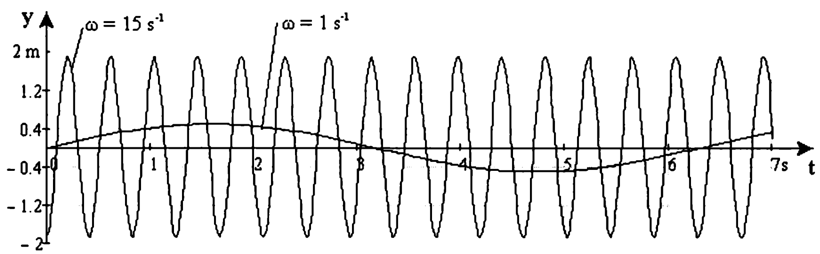
$a = \frac{1}{8}$; $b = -\frac{15}{8}$; $y_p = \frac{1}{8} \cdot (\sin 15t - 15 \cdot \cos 15t) = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{226} \cdot \sin(15t - 86{,}2°)$ in Meter.

Lösungsvariante: Komplexer Ansatz $\underline{y}_p = \underline{a} \cdot e^{j \cdot 15t}$ für die Differentialgleichung

$\ddot{\underline{y}} + 4 \cdot \dot{\underline{y}} + 229 \cdot \underline{y} = 113 \cdot e^{j \cdot 15t}$. Einsetzen führt auf $\underline{a} \cdot (4 + 60j) \cdot e^{j \cdot 15t} = 113 \cdot e^{j \cdot 15t}$.

Nach Division durch e^{j15t} erhält man $\underline{a} = \frac{113}{4+60j} = \frac{113}{4 \cdot \sqrt{226} \cdot e^{j \cdot 86{,}2°}} = \frac{\sqrt{226}}{8} \cdot e^{-j \cdot 86{,}2°}$.

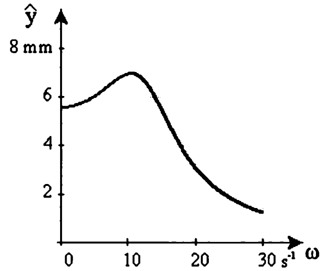
Somit: $\underline{y}_p = \frac{\sqrt{226}}{8} \cdot e^{-j \cdot 86{,}2°} \cdot e^{j \cdot 15t} = \frac{\sqrt{226}}{8} \cdot e^{j \cdot (15t - 86{,}2°)}$. Der Imaginärteil von $\underline{y}_p$ ist die gesuchte Lösung: $y_p = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{226} \cdot \sin(15t - 86{,}2°)$ in Meter.



Stationäre Lösungen

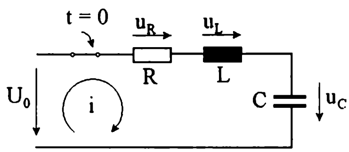
4.58 **c)** $\omega = 1\ s^{-1}$: $\ddot{y} + 4\cdot\dot{y} + 229\cdot y = 113\cdot\sin t$; $y_p = a\cdot\sin t + b\cdot\cos t$; $y_p' = a\cdot\cos t - b\cdot\sin t$;
$y_p'' = -a\cdot\sin t - b\cdot\cos t$;
$-a\cdot\sin t - b\cdot\cos t + 4\cdot(a\cdot\cos t - b\cdot\sin t) + 229\cdot(a\cdot\sin t + b\cdot\cos t) = 113\cdot\sin t$;
$-a - 4b + 229a = 113$ und $-b + 4a + 229b = 0 \Rightarrow a = \frac{6441}{13000}$; $b = -\frac{113}{13000}$;
$$y_p = \frac{1}{13000}\cdot(6441\cdot\sin t - 113\cdot\cos t) = 0{,}496\cdot\sin(t - 1{,}0°) \text{ in Meter.}$$
d) Resonanzfrequenz: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\cdot\delta^2} = \sqrt{229 - 2\cdot 2^2} = 14{,}87\ s^{-1}$;
Resonanzamplitude: $\hat{y}_r = \frac{F}{m}\cdot\frac{1}{2\delta\cdot\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} = \frac{113}{1}\cdot\frac{1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{229-2^2}} = 1{,}883\ m \approx 1{,}9\ m$.

4.59 $\omega_0 = \sqrt{c/m} = 13{,}4\ s^{-1}$, $\delta = b/2m = 6\ s^{-1}$; $F = 1$ N. Formel für d.
Frequenzgang der Amplitude siehe Lehrbuch Seite 170:

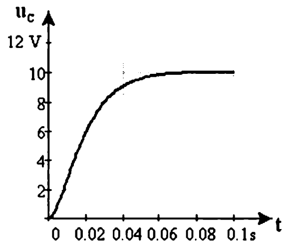


$$\hat{y}(\omega) = \frac{F}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\cdot\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{(180-\omega^2)^2 + 144\cdot\omega^2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 216\,\omega^2 + 32400}};$$
$\hat{y}(\omega)$ ist maximal, wenn der Nenner und damit der Radikand
$f(\omega) = \omega^4 - 216\cdot\omega^2 + 32400$ minimal ist.
$f'(\omega) = 4\,\omega^3 - 432\,\omega = 4\omega\cdot(\omega^2 - 108) = 0 \Rightarrow \omega^2 - 108 = 0$ oder $\omega = 6\cdot\sqrt{3} = 10{,}4\ s^{-1}$.
$f''(\omega) = 12\omega^2 - 432$; $f''(6\cdot\sqrt{3}) = 864 > 0 \Rightarrow \omega = \omega_r = 6\cdot\sqrt{3} \approx 10{,}4\ s^{-1}$ ist Minimalstelle des Nenners und damit Maximalstelle der Amplitude, also die Resonanzfrequenz ω_r.
Maximale Amplitude: $\hat{y}(\omega_r) = \frac{1}{144}$ m $\approx 6{,}9$ mm

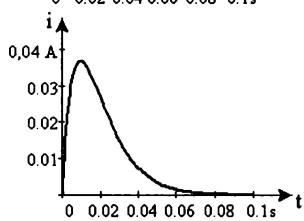
4.60 Der Schalter werde zur Zeit t = 0 geschlossen. Der Stromkreis ist "energielos": Anfänglich keine Spannungen oder Ströme.



$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}\cdot u_C = \frac{1}{LC}\cdot u;\ u_C(0) = 0;$$
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\cdot\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}\cdot i;\ \dot{u}_C(0) = \frac{1}{C}\cdot i(0) = \frac{1}{C}\cdot 0 = 0,$$
$u(t) = U_0 = 10$ V für $t \geq 0$. Einsetzen ergibt die Differentialgleichung:



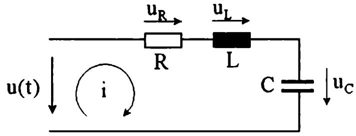
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + 200\cdot\frac{du_C}{dt} + 10000\cdot u_C = 100000 \text{ mit } u_C(0) = 0,\ \dot{u}_C(0) = 0$$
(1) $\lambda^2 + 200\lambda + 10000 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -100$; aperiodischer Grenzfall; $u_{C,h} = (C_1 + C_2\cdot t)\cdot e^{-100\cdot t}$;
(2) $u_{C,p} = a$; $0 + 200\cdot 0 + 10000\cdot a = 100000 \Rightarrow a = 10$; $u_{C,p} = 10$
(3) $u_C(t) = u_{C,h} + u_{C,p} = (C_1 + C_2\cdot t)\cdot e^{-100\cdot t} + 10$
$\dot{u}_C = (-100\cdot C_1 + C_2 - 100C_2\cdot t)\cdot e^{-100\cdot t}$; $u_C(0) = (C_1 + C_2\cdot 0)\cdot 1 + 10 = 0$
$\Rightarrow C_1 = -10$;
$\dot{u}_C(0) = (-100\cdot C_1 + C_2 - 100\cdot C_2\cdot 0)\cdot 1 = 0 \Rightarrow C_2 = 100\cdot C_1 = -1000$;
$u_C(t) = (-10 - 1000\cdot t)\cdot e^{-100\cdot t} + 10 = 10 - (1000\cdot t + 10)\cdot e^{-100\cdot t}$ in Volt;



$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt};\ \frac{du_C}{dt} = 100000\cdot t\cdot e^{-100\cdot t};$$
$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = 10\cdot t\cdot e^{-100\cdot t} \text{ in Ampere}$$

4.61 a) $\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+\dfrac{R}{L}\cdot\dfrac{du_C}{dt}+\dfrac{1}{LC}\cdot u_C=\dfrac{1}{LC}\cdot u(t)$; Einsetzen:

$\ddot{u}_C+2500\cdot\dot{u}_C+1000000\cdot u_C=170\,000\,000\cdot\sin 500t$.



Die *stationäre* Lösung u_C ist die von den Anfangsbedingungen unabhängige partikuläre Lösung.
Ansatz: $u_{C,p}=a\cdot\sin 500t+b\cdot\cos 500t$; $\dot{u}_{C,p}=500\cdot a\cdot\cos 500t-500\cdot b\cdot\sin 500t$;

$\ddot{u}_{C,p}=-250000\cdot a\cdot\sin 500t-250000\cdot b\cdot\cos 500t$;

$-250000\cdot a\cdot\sin 500t-250000\cdot b\cdot\cos 500t+2500\cdot(500\cdot a\cdot\cos 500t-500\cdot b\cdot\sin 500t)+$
$+1000000\cdot(a\cdot\sin 500t+b\cdot\cos 500t)=170000000\cdot\sin 500t$

oder durch 500 gekürzt:

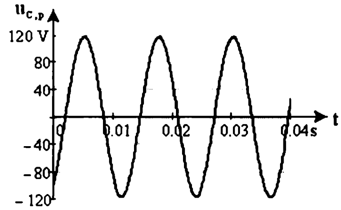
$-500\cdot a\cdot\sin 500t-500\cdot b\cdot\cos 500t+$
$+2500\cdot(a\cdot\cos 500t-b\cdot\sin 500t)+$
$+2000\cdot(a\cdot\sin 500t+b\cdot\cos 500t)=340000\cdot\sin 500t$; daraus:

$-500a-2500b+2000a=340000$ und

$-500b+2500a+2000b=0\ \Rightarrow\ a=60;\ b=-100$;

$u_C=u_{C,p}=60\cdot\sin 500t-100\cdot\cos 500t\approx 117\cdot\sin(500t-59{,}0°)$

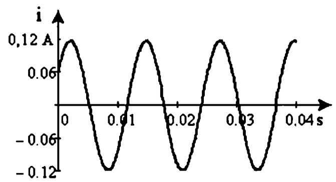
in Volt



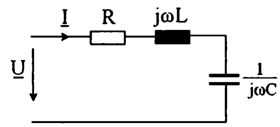
b) $i(t)=\dot{q}=C\cdot\dot{u}_C=2\cdot 10^{-6}\cdot(30000\cdot\cos 500t+50000\cdot\sin 500t)=$

$\dfrac{1}{50}\cdot(5\cdot\sin 500t+3\cdot\cos 500t)=0{,}117\cdot\sin(500t-31{,}0°)$

in Ampere



c) Übliche komplexe Rechnung in der Elektrotechnik bei sinusförmigen Wechselströmen (symbolische Methode):
$\underline{U}=\underline{Z}\cdot\underline{I}$, wobei $\underline{U}$ und $\underline{I}$ die komplexen Effektivwerte der angelegten Spannung und der Stromstärke sind. $\underline{Z}$ ist der komplexe Widerstand (die Impedanz) des Stromkreises.

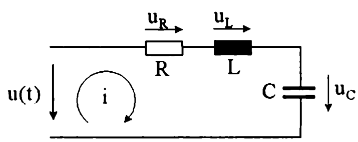


$\underline{Z}=R+j\cdot\omega L+\dfrac{1}{j\cdot\omega C}=1250+j\cdot 500\cdot 0{,}5-j\cdot\dfrac{1}{500\cdot 2\cdot 10^{-6}}=1250-750j=250\sqrt{34}\cdot e^{-j30{,}0°}$;

$\underline{U}=170\cdot\sqrt{2}$; $\underline{I}=\dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}}=\dfrac{170\cdot\sqrt{2}}{250\sqrt{34}\cdot e^{-j31{,}0°}}=0{,}117\cdot\sqrt{2}\cdot e^{j31{,}0°}$; $i(t)=0{,}117\cdot\sin(500t+31{,}0°)$;

$\underline{U}_C=\dfrac{1}{j\cdot\omega C}\cdot\underline{I}=-j\cdot 1000\cdot 0{,}117\sqrt{2}\cdot e^{j31{,}0°}=117\sqrt{2}\cdot e^{-j59{,}0°}$; $u_C(t)=117\cdot\sin(500t-59{,}0°)$

4.62 Maschenregel (2. Kirchhoff'sche Regel):
$u_R+u_L+u_C=u(t)$. Mit $u_R=R\cdot i$ und $u_L=L\cdot di/dt$ folgt:
$R\cdot i+L\cdot di/dt+u_C=u(t)$. Wegen $q=C\cdot u_C$ ist
$i=dq/dt=C\cdot du_C/dt$ und weiters $di/dt=C\cdot d^2u_C/dt^2$. Einsetzen ergibt $RC\cdot du_C/dt+LC\cdot d^2u_C/dt^2+u_C=u(t)$ oder schließlich



$\ddot{u}_C+\dfrac{R}{L}\cdot\dot{u}_C+\dfrac{1}{LC}\cdot u_C=\dfrac{1}{LC}\cdot u(t)$. Dazu kommen die Anfangsbedingungen: $u_C(0)=0$ sowie wegen $i=\dot{q}=C\cdot\dot{u}_C$ noch $\dot{u}_C(0)=\dfrac{1}{C}\cdot i(0)=\dfrac{1}{C}\cdot 0=0$ (Stromkreis anfänglich energielos, d.h. keine Spannungen, keine Ströme).

Die gefragte Stromstärke i(t) kann danach aus $i=\dot{q}=C\cdot\dot{u}_C$ ermittelt werden.

4.62 Forts. **a)** $\ddot{u}_C + 200 \cdot \dot{u}_C + 20\,000 \cdot u_C = 200\,000$; $u_C(0) = 0$, $\dot{u}_C(0) = 0$;

(1) $\ddot{u}_C + 200 \cdot \dot{u}_C + 20000 \cdot u_C = 0$; $\lambda^2 + 200\lambda + 20000 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -100 + 100j$; $\lambda_2 = -100 - 100j$;

$u_{C,h} = e^{-100 \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \sin 100t + C_2 \cdot \cos 100t)$

(2) Ansatz: $u_{C,p} = a$; $u_{C,h}' = u_{C,h}'' = 0$; $0 + 200 \cdot 0 + 20000 \cdot a = 200000 \Rightarrow a = 10$; $u_{C,p} = 10$

(3) $u_C = u_{C,h} + u_p = e^{-100 \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \sin 100t + C_2 \cdot \cos 100t) + 10$

$\dot{u}_C = 100 \cdot e^{-100 \cdot t} \cdot [-(C_1 + C_2) \cdot \sin 100t + (C_1 - C_2) \cdot \cos 100t]$;

$u_C(0) = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) + 10 = 0 \Rightarrow C_2 = -10$;

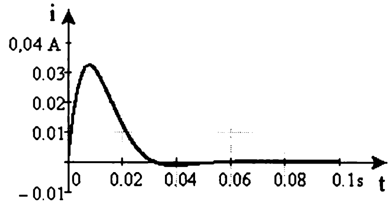
$\dot{u}_C(0) = 100 \cdot 1 \cdot [-(C_1 + C_2) \cdot 0 + (C_1 - C_2) \cdot 1] = 0 \Rightarrow$

$C_1 = C_2 = -10$;

$u_C(t) = -10 \cdot e^{-100 \cdot t}(\sin 100\,t + \cos 100t) + 10$ in Volt

$i = \dot{q} = C \cdot \dot{u}_C = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 2000 \cdot e^{-100 \cdot t} \cdot \sin 100t =$

$= 0{,}1 \cdot e^{-100 \cdot t} \cdot \sin 100t$ in Ampere



b) $\ddot{u}_C + 200 \cdot \dot{u}_C + 20\,000 \cdot u_C = 5\,800\,000 \cdot \sin 150\,t$; $u_C(0) = 0$, $\dot{u}_C(0) = 0$;

Die *stationäre* Lösung u_C ist die von den Anfangsbedingungen unabhängige partikuläre Lösung.

Ansatz: $u_{C,p} = a \cdot \sin 150t + b \cdot \cos 150t$;

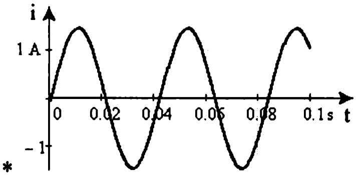
$\dot{u}_{C,p} = 150 \cdot a \cdot \cos 150t - 150 \cdot b \cdot \sin 150t$;

$\ddot{u}_{C,p} = -22500 \cdot a \cdot \sin 150t - 22500 \cdot b \cdot \cos 150t$;

$-22500 \cdot a \cdot \sin 150t - 22500 \cdot b \cdot \cos 150t +$

$+ 200 \cdot (150 \cdot a \cdot \cos 150t - 150 \cdot b \cdot \sin 150t) +$

$+ 20000 \cdot (a \cdot \sin 150t + b \cdot \cos 150t) = 5800000 \cdot \sin 150t$ *



oder durch $25 \cdot 100 = 2500$ gekürzt:

$-9 \cdot a \cdot \sin 150t - 9 \cdot b \cdot \cos 150t + 2 \cdot (6 \cdot a \cdot \cos 150t - 6 \cdot b \cdot \sin 150t) + 8 \cdot (a \cdot \sin 150t + b \cdot \cos 150t) =$

$= 2320 \cdot \sin 150t$; daraus:

$-9a - 12b + 8a = 2320$ und $-9b + 12a + 8b = 0 \Rightarrow a = -16$; $b = -192$;

$u_C = u_{C,p} = -16 \cdot \sin 150t - 192 \cdot \cos 150t = 16 \cdot \sqrt{145} \cdot \sin(150t - 94{,}8°)$ in Volt

$i(t) = \dot{q} = C \cdot \dot{u}_C = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 150 \cdot (-16 \cdot \cos 150t + 192 \cdot \sin 150t) =$

$= 1{,}44 \cdot \sin 150t - 0{,}12 \cdot \cos 150t \approx 1{,}445 \cdot \sin(150t - 4{,}8°)$ in Ampere

Man kann aber auch wie in Aufgabe 4.49 vorgehen und die Differentialgleichung für die Stromstärke i(t) aufstellen: $R \cdot i + L \cdot di/dt + u_C = u(t)$. Differenzieren dieser Gleichung ergibt $R \cdot di/dt + L \cdot d^2i/dt^2 + du_C/dt = du/dt$. Wegen $i = dq/dt = C \cdot du_C/dt$ oder $du_C/dt = i/C$ folgt $R \cdot di/dt + L \cdot d^2i/dt^2 + i/C = du/dt$ oder $d^2i/dt^2 + (R/L) \cdot di/dt + 1/(LC) \cdot i = (1/L) \cdot du/dt$.

Anfangsbedingungen: $i(0) = 0$. Aus $R \cdot i + L \cdot di/dt + u_C = u(t)$ folgt $R \cdot i(0) + L \cdot di/dt(0) + u_C(0) = u(0)$ oder $R \cdot 0 + L \cdot di/dt(0) + 0 = u(0)$, d.h. schließlich die zweite Anfangsbedingung $di/dt(0) = u(0)/L$.

Zu beachten ist, dass in der Differentialgleichung für i die Spannung u(t) abzuleiten ist! Für beispielsweise $u(t) = U_0 = 10$ V ist $du/dt = 0$.

Lösung von a) mit Hilfe der Differentialgleichung für die Stromstärke: L = 1.

Da $i = \dot{q} = C \cdot \dot{u}_C$ folgt $u_C = \int (1/C) \cdot i\,dt$. Die Integrationskonstante K ist so zu bestimmen, dass $u_C(0) = 0$ ist. Durch die Integration ist diese Lösungsvariante etwas aufwändiger.

Define $r=200$	Fertig
Define $c=50 \cdot 10^{-6}$	Fertig
$\text{deSolve}\left(i''+r \cdot i'+\frac{1}{c} \cdot i=0 \text{ and } i(0)=0 \text{ and } i'(0)=10, t, i\right)$	$i=\frac{e^{-100 \cdot t} \cdot \sin(100 \cdot t)}{10}$

$\int \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{e^{-100 \cdot t} \cdot \sin(100 \cdot t)}{10}\right) dt$

$-10 \cdot e^{-100 \cdot t} \cdot (\cos(100 \cdot t) + \sin(100 \cdot t))$

$u_C(t) = -10 \cdot e^{-100 \cdot t}(\sin 100\,t + \cos 100t) + K \Rightarrow K = 10$.

4.63 $\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\cdot\dot{u}_C + \frac{1}{LC}\cdot u_C = \frac{1}{LC}\cdot u(t)$ mit $u_C(0) = 0$ und $\dot{u}_C(0) = 0$ Begründung siehe Aufgabe 4.62.

$\ddot{u}_C + 2500\cdot\dot{u}_C + 1\,000\,000\cdot u_C = 30\,000\,000$

(1) $\ddot{u}_C + 2500\cdot\dot{u}_C + 1\,000\,000\cdot u_C = 0$; $\lambda^2 + 2500\cdot\lambda + 1000000 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2000$; $\lambda_2 = -500$;

Kriechfall; $u_{C,h} = C_1\cdot e^{-2000\cdot t} + C_2\cdot e^{-500\cdot t}$

(2) $\ddot{u}_C + 2500\cdot\dot{u}_C + 1\,000\,000\cdot u_C = 30\,000\,000$;

Ansatz: $u_{C,p} = a$; $0 + 2500\cdot 0 + 1000000\cdot a = 30000000 \Rightarrow a = 30$; $u_{C,p} = 10$

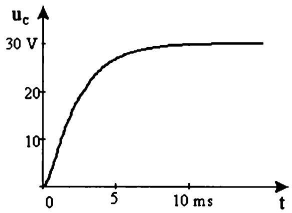
(3) $u_C = u_{C,h} + u_{C,p} = C_1\cdot e^{-2000\cdot t} + C_2\cdot e^{-500\cdot t} + 30$

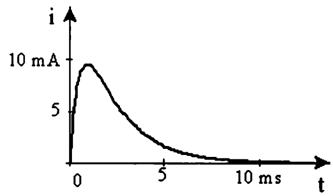
Berücksichtigung der Anfangsbedingungen: $\dot{u}_C = -2000\cdot C_1\cdot e^{-2000\cdot t} - 500\cdot C_2\cdot e^{-500\cdot t}$;

$u_C(0) = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 1 + 30 = 0$ und $\dot{u}_C(0) = -2000\cdot C_1\cdot 1 - 500\cdot C_2\cdot 1 = 0 \Rightarrow C_1 = 10$; $C_2 = -40$;

$u_C(t) = 10\cdot e^{-2000\cdot t} - 40\cdot e^{-500\cdot t} + 30$ in Volt;

$i(t) = C\cdot\dot{u}_C = \frac{1}{50}\cdot e^{-500t} - \frac{1}{50}\cdot e^{-2000t} = 0{,}02\cdot\left(e^{-500t} - e^{-2000t}\right)$ in Ampere





4.64 Resonanzfrequenz (Lehrbuch Seite 170): $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0 = \sqrt{108} \approx 10{,}4$;

$\ddot{y} + 108\cdot y = 52\cdot\sin(\omega_0 t)$.

(1) $\ddot{y} + 108\cdot y = 0$; $\lambda^2 + 108 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = j\cdot\omega_0$; $\lambda_2 = -j\cdot\omega_0$; $y_h = C_1\cdot\sin(\omega_0\cdot t) + C_2\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$.

(2) $\ddot{y} + 108\cdot y = 52\cdot\sin(\omega_0 t)$; Ansatz: $y_p = t\cdot[a\cdot\sin(\omega_0\cdot t) + b\cdot\cos(\omega_0\cdot t)]$;

$\dot{y}_p = (a - bt\omega_0)\cdot\sin(\omega_0 t) + (at\omega_0 + b)\cdot\cos(\omega_0 t)$;

$\ddot{y}_p = \omega_0(at\omega_0 + 2b)\cdot\sin(\omega_0 t) + \omega_0(2a - bt\omega_0)\cdot\cos(\omega_0 t)$; Einsetzen führt auf:

$2\omega_0\cdot[-b\cdot\sin(\omega_0 t) + a\cdot\cos(\omega_0 t)] = 52\cdot\sin(\omega_0 t)$; Koeffizientenvergleich: $a = 0$ und $b = -\frac{26}{\omega_0}$.

$y_p = -\frac{26}{\omega_0}\cdot t\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$.

(3) $y = y_h + y_p = C_1\cdot\sin(\omega_0\cdot t) + C_2\cdot\cos(\omega_0\cdot t) - \frac{26}{\omega_0}\cdot t\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$.

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$:

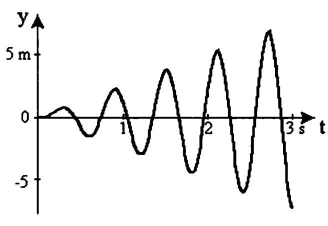
$\dot{y} = (26t - C_2\omega_0)\cdot\sin(\omega_0 t) + \left(C_1\omega_0 - \frac{26}{\omega_0}\right)\cdot\cos(\omega_0 t)$; $y(0) = C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1 - \frac{26}{\omega_0}\cdot 0\cdot 1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$;

$\dot{y}(0) = (26\cdot 0 - C_2\omega_0)\cdot 0 + \left(C_1\omega_0 - \frac{26}{\omega_0}\right)\cdot 1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{26}{\omega_0^2}$;

$y(t) = \frac{26}{\omega_0^2}\sin(\omega_0\cdot t) - \frac{26}{\omega_0}\cdot t\cdot\cos(\omega_0\cdot t) \approx$

$\approx 0{,}24\cdot\sin(\omega_0\cdot t) - 2{,}50\cdot t\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$ in Meter.

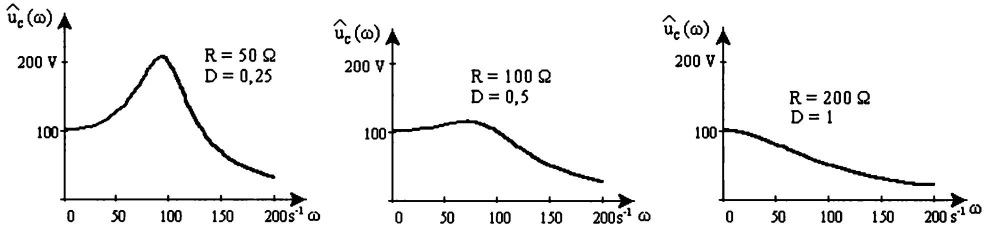
Die Amplituden nehmen, wenn man vom ersten Term mit fester Amplitude absieht, linear mit der Zeit zu und wachsen für $t \to \infty$ über alle Schranken.



4.65 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2D^2\omega_0^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1-2D^2}$; $\omega_r = \omega_0$ für D = 0; mit wachsendem D wird ω_r kleiner; ω_r ist positiv für $1 - 2D^2 > 0$ oder $D < 1/\sqrt{2}$. D.h. für D $D_{Gr} \geq 1/\sqrt{2} = 0{,}707$ gibt es keine Resonanz mehr.

Beispiel 4.28, Lehrbuch Seite 172: $D = \frac{R \cdot \sqrt{C}}{2 \cdot \sqrt{L}}$. Ist C gleich 100 µF und L = 1 H, so kann man fragen, wie groß R sein müsste, damit es zu keiner Resonanz für die Kondensatorspannung u_C kommt:

$D = R \cdot \sqrt{C}/\left(2 \cdot \sqrt{L}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow D \geq 100 \cdot \sqrt{2} \approx 141{,}4\ \Omega$. Ist somit $R \geq 141{,}4\ \Omega$, so gibt es für die Kondensatorspannung keine Resonanz mehr; der Frequenzgang der Amplitude $\hat{u}_C(\omega)$ ist eine streng fallende Funktion. Die folgenden Abbildungen zeigen Frequenzgänge von $\hat{u}_C(\omega)$ für drei verschiedene Ohmsche Widerstände.



Zu Aufgabe 4.65

4.66 $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $0{,}05 \cdot [0 + 1] = 0{,}05$
$x_1 = 0{,}05$; $y_1 = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$; $0{,}05 \cdot [0{,}05 + 1{,}05] = 0{,}0550$
$x_2 = 0{,}1$; $y_2 = 1{,}05 + 0{,}0550 = 1{,}1050$; $0{,}05 \cdot [0{,}1 + 1{,}1050] = 0{,}0603$
$x_3 = 0{,}15$; $y_3 = 1{,}1050 + 0{,}0603 = 1{,}1653$; $0{,}05 \cdot [0{,}15 + 1{,}1653] = 0{,}0658$
$x_4 = 0{,}2$; $y_4 = 1{,}1653 + 0{,}0658 = 1{,}2310$; $0{,}05 \cdot [0{,}2 + 1{,}2310] = 0{,}0716$
$x_5 = 0{,}25$; $y_5 = 1{,}2310 + 0{,}0716 = 1{,}3026$; $0{,}05 \cdot [0{,}25 + 1{,}3026] = 0{,}0776$
$x_6 = 0{,}3$; $y_6 = 1{,}3026 + 0{,}0776 = 1{,}3802$; $0{,}05 \cdot [0{,}3 + 1{,}3802] = 0{,}0840$
$x_7 = 0{,}35$; $y_7 = 1{,}3802 + 0{,}0840 = 1{,}4642$; $0{,}05 \cdot [0{,}35 + 1{,}4642] = 0{,}0907$
$x_8 = 0{,}4$; $y_8 = 1{,}4642 + 0{,}0907 =$ **1,5549**

	A	B	C	D
1	Schrittweite:		0,05	
2	n	x	y	f(x,y)*h
3	0	0,0	1,0000	0,0500
4	1	0,05	1,0500	0,0550
5	2	0,1	1,1050	0,0603
6	3	0,15	1,1653	0,0658
7	4	0,2	1,2310	0,0716
8	5	0,25	1,3026	0,0776
9	6	0,3	1,3802	0,0840
10	7	0,35	1,4642	0,0907
11	8	0,4	**1,5549**	

Exakte Lösung: $y' - y = x$; lin. Differentialgl. m. konst. Koeffizienten; (1) $y_h = C \cdot e^x$;
(2) $y_p = a \cdot x + b$; $a - (a \cdot x + b) = x$; Koeffizientenvergleich $\Rightarrow a = -1$; $b = -1$; $y_p = -x - 1$
(3) $y = y_h + y_p = C \cdot e^x - x - 1$; $y(0) = C \cdot 1 - 0 - 1 = 1 \Rightarrow C = 2$; daher lautet die exakte Lösung:
$y = 2 \cdot e^x - x - 1$; $y(0{,}4) = 2 \cdot e^{0{,}4} - 0{,}4 - 1 =$ **1,5836**

4.67

	A	B	C	D
1	Schrittweite h:		0,05	
2	n	t	v	h*f(t,v)
3	0	0,0	0,0000	0,5000
4	1	0,05	0,5000	0,4950
5	2	0,10	0,9950	0,4802
6	3	0,15	1,4752	0,4565
7	4	0,20	1,9317	0,4254
8	5	0,25	2,3570	0,3889
9	6	0,30	**2,7459**	

Exakte Lösung siehe Beispiel 4.8, Lehrbuch Seite 132 f.:
$v(t) = 5 \cdot \tanh(2t)$; $v(0{,}3) = 5 \cdot \tanh(2 \cdot 0{,}3) = 2{,}6852\,\text{m/s}$

4.68

	A	B	C	D
1	Schrittweite h:		0,1	
2	n	x	y	h*f(x,y)
3	0	0,0	0,0000	0,1000
4	1	0,10	0,1000	0,1010
5	2	0,20	0,2010	0,1040
6	3	0,30	0,3050	0,1093
7	4	0,40	0,4143	0,1172
8	5	0,50	**0,5315**	

Exakte Lösung: $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$; $\frac{dy}{1+y^2} = dx$; $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$;
arctan y = x + C; y = tan(x + C);
Anfangsbedingung: y(0) = tan(0 + C) = 0 $\Rightarrow$ C = 0;
y = tan x; y(0,5) = **0,5463**

4.69

	A	B	C	D
1	Schrittweite h:		0,1	
2	n	x	y	h*f(x,y)
3	0	0,0	1,0000	0,1000
4	1	0,10	1,1000	0,1100
5	2	0,20	1,2100	0,1210
6	3	0,30	**1,3310**	

Exakte Lösung: $\frac{dy}{dx} = y$; $\frac{dy}{y} = dx$; $\int \frac{dy}{y} = \int dx$;

$\ln|y| = x + \bar{C}$; $|y| = e^{x+\bar{C}}$; $y = \underbrace{\pm e^{\bar{C}}}_{C} \cdot e^x$; $y = C \cdot e^x$;

Anfangsbedingung: $y(0) = C \cdot 1 = 1 \Rightarrow C = 1$;
$y = e^x$; $y(0,3) = e^{0,3}$ = **1,3499**

4.70

	A	B	C	D
1	Schrittweite h:		0,05	
2	n	x	y	h*f(x,y)
3	0	0,0	1,0000	0,0045
4	1	0,05	1,0045	0,0045
5	2	0,10	1,0090	0,0045
6	3	0,15	1,0136	0,0046
7	4	0,20	1,0181	0,0046
8	5	0,25	1,0227	0,0046
9	6	0,30	1,0273	0,0046
10	7	0,35	1,0319	0,0046
11	8	0,40	1,0365	0,0046
12	9	0,45	1,0412	0,0047
13	10	0,50	1,0458	0,0047

61	58	2,90	1,2923	0,0056
62	59	2,95	1,2979	0,0056
63	60	3,00	**1,3036**	

Exakte Lösung siehe Beispiel 4.9, Lehrbuch Seite 134:

$y = \frac{10}{1+9 \cdot e^{-x/10}}$; $y(3) = \frac{10}{1+9 \cdot e^{-3/10}}$ = **1,3042**

5 Transformationen und Signale

5.1 $42 \cdot 28 = 1176 = \text{MCLXXVI}$

5.2 a) $R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$; $\frac{di}{dt} + 200i = 500 \cdot \sin 100t$;

Ansatz für die partikuläre Lösung, die unabhängig von einer Anfangsbedingung ist (= stationäre Lösung): $i(t) = i_p = a \cdot \sin 100t + b \cdot \cos 100t$; $\frac{di}{dt} = 100a \cdot \cos 100t - 100b \cdot \sin 100t$;

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$100a \cdot \cos 100t - 100b \cdot \sin 100t + 200a \cdot \sin 100t + 200b \cdot \cos 100t = 500 \cdot \sin 100t$ oder gekürzt:

$a \cdot \cos 100t - b \cdot \sin 100t + 2a \cdot \sin 100t + 2b \cdot \cos 100t = 5 \cdot \sin 100t$;

Koeffizientenvergleich: $a + 2b = 0$ und $-b + 2a = 5 \Rightarrow a = 2$ und $b = -1$;

$i(t) = 2 \cdot \sin 100t - \cos 100t = \sqrt{5} \cdot \sin(100t + \varphi)$, in Ampere, mit $\varphi = \arctan \frac{-1}{2} = -26{,}6°$;

$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = 50 \cdot \sin 100t + 100 \cdot \cos 100t = 50 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(100t + \varphi)$, in Volt,

mit $\varphi = \arctan \frac{100}{50} = 63{,}4°$;

b) $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{R + j \cdot \omega L} = \frac{250/\sqrt{2}}{100 + j \cdot 50} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 - j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{5} \cdot e^{-j \cdot 26{,}6°}$;

mit $\hat{i} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$ ist $i(t) = \sqrt{5} \cdot \sin(100t - 26{,}6°)$ in Ampere.

$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I} = j \cdot 50 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j \cdot 26{,}6°} = e^{j \cdot 90°} \cdot 50 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j \cdot 26{,}6°} = \frac{50 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot (90° - 26{,}6°)} = \frac{50 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot 63{,}4°}$;

mit $\hat{u}_L = \left|\underline{U}_L \cdot \sqrt{2}\right| = 50 \cdot \sqrt{5} \approx 112$ ist $u_L(t) = 50 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(100t + 63{,}4°)$ in Volt

5.3 a) $R \cdot i + u_C = u$; wegen $q = C \cdot u_C$ und $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ folgt $RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u$ oder

$\frac{du_C}{dt} + 100u_C = 25000 \cdot \sin(100t)$; Ansatz für die partikuläre Lösung, die unabhängig von einer Anfangsbedingung ist: $u_C(t) = u_{C,p} = a \cdot \sin 100t + b \cdot \cos 100t$;

$\frac{du_C}{dt} = 100a \cdot \cos 100t - 100b \cdot \sin 100t$; Einsetzen in die Differentialgleichung:

$100a \cdot \cos 100t - 100b \cdot \sin 100t + 100a \cdot \sin 100t + 100b \cdot \cos 100t = 25000 \cdot \sin 100t$ oder gekürzt:

$a \cdot \cos 100t - b \cdot \sin 100t + a \cdot \sin 100t + b \cdot \cos 100t = 250 \cdot \sin 100t$;

Koeffizientenvergleich: $a + b = 0$ und $-b + a = 250 \Rightarrow a = 125$ und $b = -125$;

$u_C(t) = 125 \cdot (\sin 100t - \cos 100t) = 125\sqrt{2} \cdot \sin(100t + \varphi)$ in Ampere mit $\varphi = \arctan \frac{-125}{125} = -45°$;

b) *Spannungsteilerregel: Werden Widerstände vom gleichen Strom durchflossen, so verhalten sich die Spannungen an den Widerständen wie die Widerstände.*

$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega RC} = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j \cdot 45°}$;

$\underline{U}_C = \underline{U} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j \cdot 45°} = \frac{\hat{u}_C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j \cdot 45°} = \frac{250}{2} \cdot e^{-j \cdot 45°} = 125 \cdot e^{-j \cdot 45°}$; mit $\hat{u}_C = \left|\underline{U}_C\right| \cdot \sqrt{2} = 125 \cdot \sqrt{2} \approx 177$

ist $\underline{u}_C = 125\sqrt{5} \cdot \sin(100t - 45°)$ in Volt.

Lösungsalternative: Zuerst $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + 1/j \cdot \omega C}$ und dann $\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$.

5.4 a) $u_C + u_R = u$; $\frac{1}{C}\cdot q + R\cdot i = u$; Differenzieren $\Rightarrow$ $\frac{1}{C}\cdot\frac{dq}{dt} + R\cdot\frac{di}{dt} = \frac{du}{dt}$; wegen $i = \frac{dq}{dt}$ und $\frac{du}{dt} = 250\cdot\omega\cos\omega t$ folgt schließlich $i + RC\cdot\frac{di}{dt} = 250\cdot\omega C\cdot\cos\omega t$ oder $\frac{di}{dt} + 100i = 50\cdot\cos\omega t$.

Ansatz für die partikuläre Lösung, die unabhängig von einer Anfangsbedingung ist:

$i(t) = i_p = a\cdot\sin 100t + b\cdot\cos 100t$; $\frac{di}{dt} = 100a\cdot\cos 100t - 100b\cdot\sin 100t$; Einsetzen in die Differentialgleichung:

$100a\cdot\cos 100t - 100b\cdot\sin 100t + 100a\cdot\sin 100t + 100b\cdot\cos 100t = 50\cdot\cos 100t$ oder gekürzt:

$2a\cdot\cos 100t - 2b\cdot\sin 100t + 2a\cdot\sin 100t + 2b\cdot\cos 100t = \cos 100t$;

Koeffizientenvergleich: $2a + 2b = 1$ und $-2b + 2a = 0$ $\Rightarrow$ $a = \frac{1}{4}$ und $b = \frac{1}{4}$;

$i(t) = i_p = \frac{1}{4}\cdot(\sin 100t + \cos 100t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sin(100t + 45°)$ in Ampere.

Anmerkung: Man könnte zur Bestimmung von i auch von der Differentialgleichung $u_C + u_R = u$ mit $u_R = R\cdot i = R\cdot\frac{dq}{dt} = RC\cdot\frac{du_C}{dt}$, also von $u_C + RC\cdot\frac{du_C}{dt} = \hat{u}\cdot\sin\omega t$, ausgehen und diese nach $u_C(t)$ lösen. Danach $i = C\cdot\frac{du_C}{dt}$.

b) $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{R + 1/(j\cdot\omega C)} = \frac{250/\sqrt{2}}{500 - j\cdot 500} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 + j) = \frac{1}{4}\cdot e^{j\cdot 45°}$; mit $\hat{i} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}354$ ist

$i(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sin(100t + 45°)$ in Ampere

5.5 a) $u_C + u_R = u$; $\frac{1}{C}\cdot q + R\cdot i = u$; Differenzieren $\Rightarrow$ $\frac{1}{C}\cdot\frac{dq}{dt} + R\cdot\frac{di}{dt} = \frac{du}{dt}$; wegen $i = \frac{dq}{dt}$ und $\frac{du}{dt} = \hat{u}\cdot\omega\cdot\cos\omega t$ folgt schließlich $RC\frac{di}{dt} + i = \omega C\cdot\hat{u}\cdot\cos\omega t$ oder $\frac{di}{dt} + 10i = \frac{1}{2}\cdot\cos 5t$.

Ansatz für die partikuläre Lösung, die unabhängig von einer Anfangsbedingung ist:

$i(t) = i_p = a\cdot\sin 5t + b\cdot\cos 5t$; $\frac{di}{dt} = 5a\cdot\cos 5t - 5b\cdot\sin 5t$; Einsetzen in die Differentialgleichung:

$5a\cdot\cos 5t - 5b\cdot\sin 5t + 10a\cdot\sin 5t + 10b\cdot\cos 5t = \frac{1}{2}\cdot\cos 5t$ oder

$10a\cdot\cos 5t - 10b\cdot\sin 5t + 20a\cdot\sin 5t + 20b\cdot\cos 5t = \cos 5t$;

Koeffizientenvergleich: $10a + 20b = 1$ und $-10b + 20a = 0$ $\Rightarrow$ $a = \frac{1}{50}$ und $b = \frac{1}{25}$;

$i(t) = i_p = \frac{1}{50}\cdot(\sin 5t + 2\cos 5t) = \frac{\sqrt{5}}{50}\cdot\sin(5t + 63{,}4°)$ in Ampere.

$u_R = R\cdot i = 20\cdot\sqrt{5}\cdot\sin(5t + 63{,}4°)$ in Volt.

Anmerkung: Man könnte zur Bestimmung von i auch von der Differentialgleichung $u_C + u_R = u$ mit $u_R = R\cdot i = R\cdot\frac{dq}{dt} = RC\cdot\frac{du_C}{dt}$, also von $u_C + RC\cdot\frac{du_C}{dt} = \hat{u}\cdot\sin\omega t$, ausgehen und diese nach $u_C(t)$ lösen. Danach $i = C\cdot\frac{du_C}{dt}$.

b) $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{R + 1/(j\cdot\omega C)} = \frac{100/\sqrt{2}}{1000 - j\cdot 2000} = \frac{\sqrt{2}}{100}\cdot(1 + 2j) = \frac{\sqrt{10}}{100}\cdot e^{j\cdot 63{,}4°}$.

Mit $\hat{i} = |\underline{I}|\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{100}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{5}}{50} \approx 0{,}0447$ ist $i(t) = \frac{\sqrt{5}}{50}\cdot\sin(5t + 63{,}4°)$ in Ampere.

$u_R(t) = R\cdot i(t) = 20\sqrt{5}\cdot\sin(5t + 63{,}4°) \approx 0{,}0447\cdot\sin(5t + 63{,}4°)$ in Ampere

5.6 **a)** $u_L + u_R = u$; mit $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ und $u_R = R \cdot i$ ergibt sich $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = u$ oder $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{1}{L} \cdot u$;

$\frac{di}{dt} + 10 \cdot i = 25 \cdot \sin 5t$.

Ansatz für die partikuläre Lösung, die unabhängig von einer Anfangsbedingung ist:

$i(t) = i_p = a \cdot \sin 5t + b \cdot \cos 5t$; $\frac{di}{dt} = 5a \cdot \cos 5t - 5b \cdot \sin 5t$; Einsetzen in die Differentialgleichung:

$5a \cdot \cos 5t - 5b \cdot \sin 5t + 10a \cdot \sin 5t + 10b \cdot \cos 5t = 25 \cdot \sin 5t$ oder gekürzt durch 5 :

$a \cdot \cos 5t - b \cdot \sin 5t + 2a \cdot \sin 5t + 2b \cdot \cos 5t = 5 \cdot \sin 5t$;

Koeffizientenvergleich: $a + 2b = 0$ und $-b + 2a = 5 \Rightarrow a = 2$ und $b = -1$;

$i(t) = i_p = 2 \sin 5t - \cos 5t = \sqrt{5} \cdot \sin(5t - 26{,}6°)$ in Ampere.

$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = 5 \sin 5t + 10 \cos 5t = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(5t + 63{,}4°)$ in Volt.

Kontrolle: $u_L + u_R = u$ mit $u_R = R \cdot i(t)$.

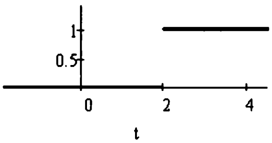
b) $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\hat{u}/\sqrt{2}}{R + j \cdot \omega L} = \frac{25/\sqrt{2}}{10 + j \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} j\right) = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot e^{-j \cdot 26{,}6°}$. Mit $\hat{i} = |\underline{I}| \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$

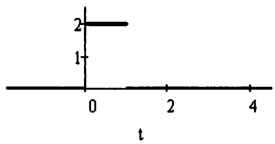
ist $i(t) = 2{,}24\ \text{A} \cdot \sin(5t - 26{,}6°)$.

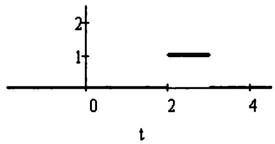
$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I} = j \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot e^{-j \cdot 26{,}6°} = e^{j \cdot 90°} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot e^{-j \cdot 26{,}6°} = 5 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot e^{j \cdot 63{,}4°}$.

Mit $\hat{u}_L = |\underline{U}_L| \cdot \sqrt{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{5} \approx 11{,}2$ ist $u_L(t) = 11{,}2\ \text{V} \cdot \sin(5t + 63{,}4°)$

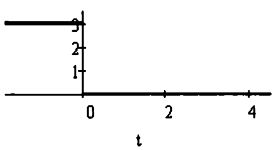
5.7 **a)** $f(t) = \sigma(t-2)$ **b)** $f(t) = 2 \cdot [\sigma(t) - \sigma(t-1)]$ **c)** $f(t) = \sigma(t-2) - \sigma(t-3)$

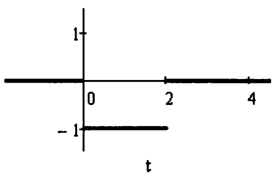


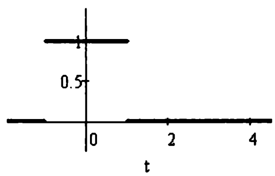




d) $f(t) = 3 \cdot \sigma(-t)$ **e)** $f(t) = \sigma(t-2) - \sigma(t)$ **f)** $f(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$







5.8 **a)** $\sigma(t-1) - \sigma(t-3)$ **b)** $-1 + 2 \cdot \sigma(t-1)$

c) $t \cdot \sigma(t)$ **d)** $1 + \sigma(t-1)$

e) $t \cdot [\sigma(t) - \sigma(t-1)]$ **f)** $(1+t) \cdot [\sigma(t+1) - \sigma(t)] + (1-t) \cdot [\sigma(t) - \sigma(t-1)]$

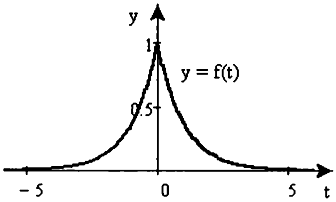
5.9 **a)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(t+2)}_{f(t)} \delta(t)\, dt = f(0) = 0 + 2 = 2$ **b)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\cos(2t)}_{f(t)} \delta(t)\, dt = f(0) = \cos(2 \cdot 0) = \cos 0 = 1$

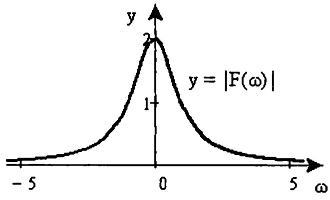
c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-t}}_{f(t)} \delta(t)\, dt = f(0) = e^{-0} = 1$ **d)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t^2}_{f(t)} \delta(t-2)\, dt = f(2) = 2^2 = 4$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sin(\pi \cdot t)}_{f(t)} \delta(t - 0{,}5)\, dt = f(0{,}5) = \sin(0{,}5 \cdot \pi) = 1$ **f)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sin(\pi \cdot t)}_{f(t)} \delta(t-1)\, dt = f(1) = \sin(\pi) = 0$

5.10 **a)** f(t) ist eine gerade Funktion; $F(\omega)=2\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot\cos(\omega t)\,dt = 2\cdot\left[\frac{e^{-t}}{1+\omega^2}\cdot(\omega\cdot\sin\omega t-\cos\omega t)\right]_0^{\infty}$ nach partieller Integration; die Stammfunktion $\frac{e^{-t}}{1+\omega^2}\cdot(\omega\cdot\sin\omega t-\cos\omega t)$ wird an der oberen Grenze null, weil e^{-t} nach null geht für $t\to\infty$. Somit:

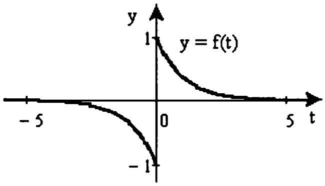
$$F(\omega)=-2\cdot\frac{e^{-0}}{1+\omega^2}\cdot(\omega\cdot\sin 0-\cos 0)=\frac{2}{1+\omega^2};\quad |F(\omega)|=\frac{2}{1+\omega^2}$$

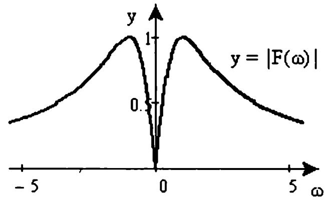




b) f(t) ist eine ungerade Funktion; $F(\omega)=-2j\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot\sin(\omega t)\,dt=-2j\cdot\left[\frac{e^{-t}}{1+\omega^2}\cdot(-\sin\omega t-\omega\cdot\cos\omega t)\right]_0^{\infty}$ nach partieller Integration; die Stammfunktion $\frac{e^{-t}}{1+\omega^2}\cdot(-\sin\omega t-\omega\cdot\cos\omega t)$ wird an der oberen Grenze null, weil e^{-t} nach null geht für $t\to\infty$. Somit:

$$F(\omega)=-2j\cdot\frac{e^{-0}}{1+\omega^2}\cdot(\sin 0+\omega\cdot\cos 0)=-\frac{2\omega j}{1+\omega^2};\quad |F(\omega)|=\frac{2\cdot|\omega|}{1+\omega^2}$$



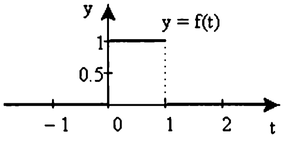


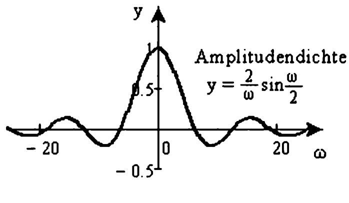
5.11 **a)** $F(\omega)=\int_0^1 1\cdot e^{-j\cdot\omega t}\,dt=\left[\frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega t}\right]_0^1=\frac{j}{\omega}\cdot\left(e^{-j\cdot\omega}-1\right).$

Unter Verwendung von $\sin\varphi=\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}\right)$ kann dieses Ergebnis in die Form $r\cdot e^{j\varphi}$ (Exponentialform einer komplexen Zahl) umgeschrieben werden:

$$\frac{j}{\omega}\cdot\left(e^{-j\cdot\omega}-1\right)=\frac{j}{\omega}\cdot e^{-j\cdot\omega/2}\left(e^{-j\cdot\omega/2}-e^{j\cdot\omega/2}\right)=\frac{2}{\omega}\cdot e^{-j\cdot\omega/2}\cdot\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{+j\cdot\omega/2}-e^{-j\cdot\omega/2}\right)=\frac{2}{\omega}\cdot\sin\frac{\omega}{2}\cdot e^{-j\cdot\omega/2}.$$

Dadurch kann sofort die Amplitudendichte angegeben werden: $|F(\omega)|=\frac{2}{\omega}\cdot\sin\frac{\omega}{2}$

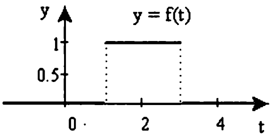


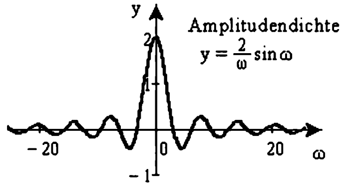


5.11 b) $F(\omega)=\int_1^3 1\cdot e^{-j\cdot\omega t}\,dt=\left[\frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega t}\right]_1^3=\frac{j}{\omega}\cdot\left(e^{-j\cdot 3\omega}-e^{-j\cdot\omega}\right).$

$$\frac{j}{\omega}\cdot\left(e^{-j\cdot 3\omega}-e^{-j\cdot\omega}\right)=\frac{j}{\omega}\cdot e^{-j\cdot 2\omega}\cdot\left(e^{-j\cdot\omega}-e^{j\cdot\omega}\right)=\frac{2}{\omega}\cdot e^{-j\cdot 2\omega}\cdot\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j\cdot\omega}-e^{-j\cdot\omega}\right)=\frac{2}{\omega}\cdot\sin\omega\cdot e^{-j\cdot 2\omega}.$$

Amplitudendichte $|F(j\omega)| = \frac{2}{\omega}\cdot\sin\omega$

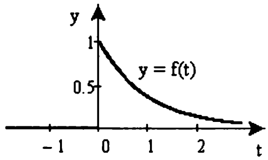


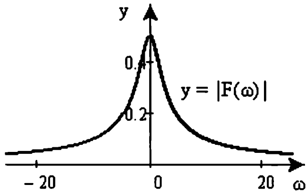


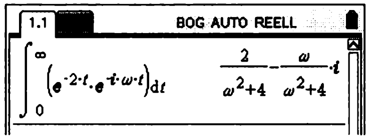
5.12 a) $F(\omega)=\int_0^\infty e^{-2t}\cdot e^{-j\cdot\omega t}\,dt=\int_0^\infty e^{-(2+j\cdot\omega)t}\,dt=\left[\frac{-1}{2+j\omega}\cdot e^{-(2+j\omega)t}\right]_0^\infty.$

Die Stammfunktion $\frac{-1}{2+j\omega}\cdot e^{-(2+j\omega)t}=\frac{-1}{2+j\omega}\cdot e^{-2t}\cdot e^{-j\omega t}$ wird an der oberen Grenze null, weil

$e^{-2t}\to 0$ für $t\to\infty$. Somit: $F(\omega)=\left[\frac{-1}{2t+j\omega}\cdot e^{-(2-j\omega)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{2+j\omega}$; $|F(\omega)|=\frac{|1|}{|2+j\omega|}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}}$



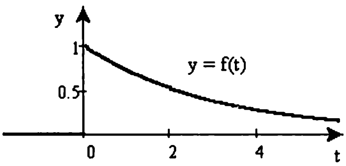


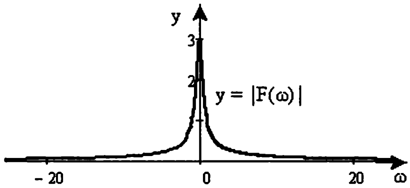


b) $F(\omega)=\int_0^\infty e^{-t/3}\cdot e^{-j\cdot\omega t}\,dt=\int_0^\infty e^{-(1/3+j\cdot\omega)t}\,dt=\left[\frac{-1}{1/3+j\omega}\cdot e^{-(1/3+j\omega)t}\right]_0^\infty=\left[\frac{-3}{1+j\cdot 3\omega}\cdot e^{-(1/3+j\omega)t}\right]_0^\infty.$

Die Stammfunktion $\frac{-3}{1+j\cdot 3\omega}\cdot e^{-(1/3-j\omega)t}=\frac{-3}{1+j\cdot 3\omega}\cdot e^{-t/3}\cdot e^{-j\omega t}$ wird an der oberen Grenze null, weil $e^{-t/3}$ nach null geht für $t\to\infty$. Somit:

$$F(\omega)=\left[\frac{-3}{1+j\cdot 3\omega}\cdot e^{-(1/3-j\omega)t}\right]_0^\infty=\frac{3}{1+j\cdot 3\omega}\cdot 1=\frac{3}{1+j\cdot 3\omega};\quad |F(\omega)|=\frac{|3|}{|1+j\cdot 3\omega|}=\frac{3}{\sqrt{9\omega^2+1}}$$





5.13 a) Ungerade Funktion; $F(\omega)=-2j\cdot\int_0^a f(t)\cdot\sin(\omega t)\,dt=-2j\cdot\int_0^a 1\cdot\sin(\omega t)\,dt=$

$=-2j\cdot\left[-\frac{1}{\omega}\cdot\cos(\omega t)\right]_0^a=-j\frac{2}{\omega}\cdot[1-\cos(\omega a)]$; $|F(\omega)|=\frac{2}{|\omega|}\cdot[1-\cos(\omega a)]$ (der Term in den eckigen Klammern kann nicht negativ werden, daher sind hier keine Betragsstriche nötig).

5.13 **b)** $F(\omega) = \int_0^1 1 \cdot e^{-j\omega t}\,dt + \int_1^2 (-1)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \left[\frac{1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega t}\right]_0^1 + \left[\frac{-1}{-j\omega}\cdot e^{-j\omega t}\right]_1^2 =$

$= \frac{j}{\omega}\cdot\left(e^{-j\cdot\omega}-1\right) - \frac{j}{\omega}\cdot\left(e^{-j\cdot 2\omega}-e^{-j\cdot\omega}\right) = \frac{j}{\omega}\cdot\left(2e^{-j\cdot\omega}-e^{-j\cdot 2\omega}-1\right) = \frac{j}{\omega}\cdot e^{-j\cdot\omega}\left(2-e^{-j\cdot\omega}-e^{j\cdot\omega}\right).$

Wegen $\cos\omega = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\omega}-e^{-j\omega}\right)$ folgt $F(\omega) = \frac{j}{\omega}\cdot e^{-j\cdot\omega}(2-2\cdot\cos\omega) = \frac{2j}{\omega}\cdot e^{-j\cdot\omega}(1-\cos\omega)$.

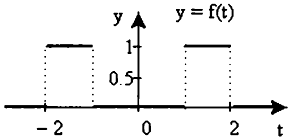
$|F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|}\cdot(1-\cos\omega)$ (der Term in den Klammern kann nicht negativ werden, daher sind hier keine Betragsstriche nötig).

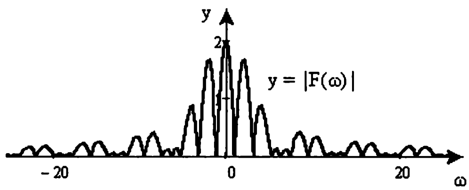
5.14 **a)** Gerade Funktion;

$F(\omega) = 2\cdot\int_0^\infty f(t)\cdot\cos(\omega t)\,dt = 2\cdot\int_1^2 1\cdot\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{\omega}\cdot[\sin(2\omega)-\sin\omega]$ für $\omega \neq 0$;

$\omega = 0$: $F(0) = 2\cdot\int_0^\infty f(t)\cdot\cos(0\cdot t)\,dt = 2\cdot\int_1^2 1\cdot 1\,dt = 2\cdot 1 = 2$.

Amplitudendichte: $|F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|}\cdot|\sin(2\omega)-\sin\omega|$ für $\omega \neq 0$, $|F(0)| = 2$





b) Gerade Funktion, $a > 0$; $F(\omega) = 2\cdot\int_0^a \left(1-\frac{1}{a}\cdot t\right)\cdot\cos(\omega t)\,dt = ?$

$\int_0^a 1\cdot\cos(\omega t)\,dt = \left[-\frac{1}{\omega}\cdot\sin(\omega t)\right]_0^a = \frac{1}{\omega}\cdot\sin(a\cdot\omega)$;

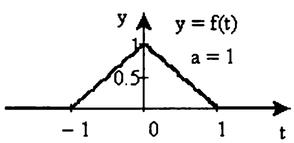
$\int_0^a t\cdot\cos(\omega t)\,dt = \left[\frac{1}{\omega}\cdot t\cdot\sin(\omega t)+\frac{1}{\omega^2}\cdot\cos(\omega t)\right]_0^a = \frac{1}{\omega}\cdot a\cdot\sin(a\cdot\omega)+\frac{1}{\omega^2}\cdot\cos(a\cdot\omega)-\frac{1}{\omega^2}$.

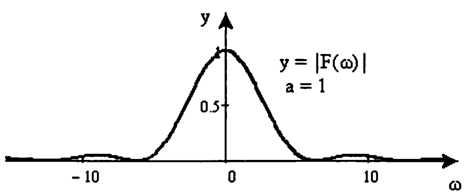
Unter Verwendung von $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2\alpha)$ und $\alpha = \frac{\omega}{2}$ erhält man

$F(\omega) = 2\cdot\int_0^a \left(1-\frac{1}{a}\cdot t\right)\cdot\cos(\omega t)\,dt = \frac{2}{a\omega^2}\cdot[1-\cos(a\omega)] = \frac{4}{a\omega^2}\cdot\sin^2\frac{a\omega}{2}$ für $\omega \neq 0$.

$\omega = 0$: $F(0) = 2\cdot\int_0^a \left(1-\frac{1}{a}\cdot t\right)\cdot\cos(\omega\cdot 0)\,dt = 2\cdot\int_0^a \left(1-\frac{1}{a}\cdot t\right)\cdot 1\,dt = a$. Somit:

$|F(\omega)| = \frac{4}{a\omega^2}\cdot\sin^2\frac{a\omega}{2}$ für $\omega \neq 0$, $|F(0)| = a$

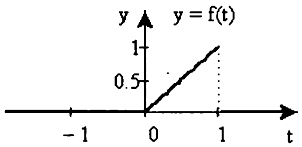


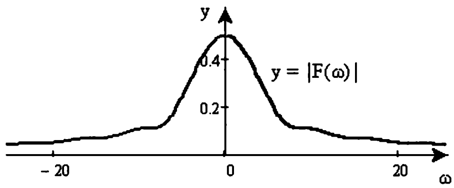


5.15 $\int t\cdot e^{a\cdot t}dt = \left(\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot e^{a\cdot t}$; $F(\omega)=\int\limits_0^1 t\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \left[\left(\frac{t}{-j\cdot\omega}-\frac{1}{(-j\cdot\omega)^2}\right)\cdot e^{-j\omega t}\right]_0^1 = \left(\frac{j}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)\cdot e^{-j\omega}-\frac{1}{\omega^2}=$

$=\frac{1}{\omega^2}\cdot\left[-1+(1+j\cdot\omega)\cdot e^{-j\omega}\right]$ für $\omega\neq 0$; $F(0)=\int\limits_0^1 t\cdot e^{-j0t}\,dt=\int\limits_0^1 t\cdot 1dt=\frac{1}{2}$;

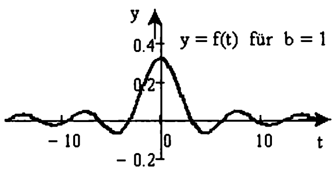
$|F(\omega)|=\frac{1}{\omega^2}\cdot\sqrt{\omega^2+2-2\cdot\cos\omega-2\omega\cdot\sin\omega}$ für $\omega\neq 0$, $|F(0)|=\frac{1}{2}$

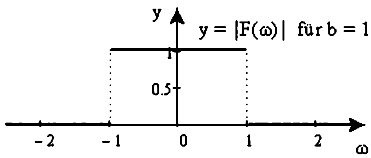




5.16 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-b}^{b}1\cdot e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{j\cdot t}\cdot e^{j\omega t}\right]_{-b}^{b}=\frac{1}{\pi t}\cdot\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j\cdot bt}-e^{-j\cdot bt}\right)$; wegen

$\sin\alpha=\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}\right)$ folgt $f(t)=\frac{1}{\pi t}\cdot\sin(bt)$.





5.17 Siehe Beispiel 5.11, Lehrbuch Seite 203.

$\sin(2t)=\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j2t}-e^{-j2t}\right)=\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j2t}\cdot 1-e^{-j2t}\cdot 1\right)$; mit $f(t)=1$ folgt $e^{j2t}\cdot 1$ ○—● $2\pi\cdot\delta(t-2)$ sowie

$e^{-j2t}\cdot 1$ ○—● $2\pi\cdot\delta(t+2)$; schließlich

$\sin(2t)$ ○—● $\frac{1}{2j}\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega-2)-\frac{1}{2j}\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega+2)=j\pi\cdot[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$.

5.18 Nach Beispiel 5.6, Lehrbuch Seite 192, lautet die komplexe Form der Rechteckimpulsfolge $f_4(t)$ mit der Periode $T = 4$ und damit $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$:

$f_4(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\cos(\omega_0 t)-\frac{2}{3\pi}\cdot\cos(3\omega_0 t)+\frac{2}{5\pi}\cdot\cos(5\omega_0 t)-\frac{2}{7\pi}\cdot\cos(7\omega_0 t)-+\ldots$.

$\cos(n\omega_0 t)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{jn\omega_0 t}-e^{-jn\omega_0 t}\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{jn\omega_0 t}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot e^{-jn\omega_0 t}\cdot 1$ ○—●

$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega-n\cdot\omega_0)-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega+n\cdot\omega_0)=\pi\cdot\delta(\omega-n\cdot\omega_0)-\pi\cdot\delta(\omega+n\cdot\omega_0)$;

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1$ ○—● $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega)=\pi\cdot\delta(\omega)$;

$F(\omega)=\ldots-\frac{2}{3}\cdot\delta\left(\omega+3\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\cdot\delta(\omega)+2\cdot\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{3}\cdot\delta\left(\omega-3\frac{\pi}{2}\right)+\ldots$

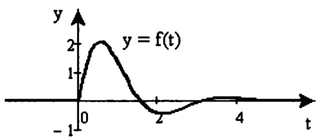
5.19 **a)** $f(t)=4\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{2j}\cdot\left(e^{j\cdot 2t}-e^{-j\cdot 2t}\right)\cdot\sigma(t)=\frac{2}{j}\cdot e^{j\cdot 2t}\cdot e^{-t}\cdot\sigma(t)-\frac{2}{j}\cdot e^{-j\cdot 2t}\cdot e^{-t}\cdot\sigma(t)$;

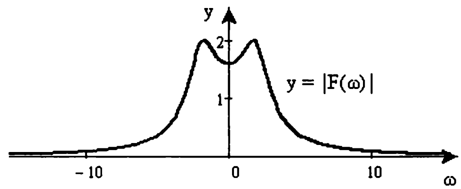
$e^{-t}\cdot\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{1+j\cdot\omega}$ (siehe Tabelle Lehrbuch Seite 204);

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{j}\cdot\frac{1}{1+j\cdot(\omega-2)}-\frac{2}{j}\cdot\frac{1}{1+j\cdot(\omega+2)}=\frac{2}{j}\cdot\left[\frac{1}{1+j\cdot(\omega-2)}-\frac{1}{1+j\cdot(\omega+2)}\right]=\frac{2}{j}\cdot\frac{4j}{5-\omega^2+j\cdot 2\omega}=\frac{8}{5-\omega^2+j\cdot 2\omega};$$

Amplitudendichte: $|F(\omega)|=\frac{|8|}{|5-\omega^2+j\cdot 2\omega|}=\frac{8}{\sqrt{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}}=\frac{8}{\sqrt{\omega^4-6\omega^2+25}}$.

$|F(\omega)|$ ist maximal, wenn der Term unter der Wurzel $r(\omega)=\omega^4-6\omega^2+25$ minimal ist.
$r'(\omega)=4\omega^3-12\omega=4\omega\cdot(\omega^2-3)=0 \Rightarrow \omega=\omega_1=0$ oder $\omega^2-3=0$, also
$\omega_{2,3}=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}73$;
$r''(\omega)=12\omega^2-12$; $r''(0)=-12<0 \Rightarrow \omega_1=0$ ist eine Maximumstelle von $r(\omega)$ und daher eine Minimumstelle von $|F(\omega)|$; $r''(\pm\sqrt{3})=36>0 \Rightarrow \omega_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ Minimumstellen von $r(\omega)$ und daher Maximumstellen von $|F(j\omega)|$; Maximumstellen von $|F(\omega)|$: $\omega_{2,3}=\pm 1{,}73\ s^{-1}$





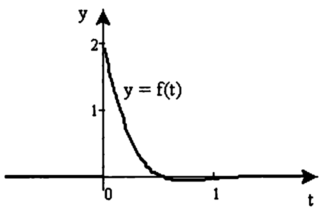
b) $f(t)=2\cdot e^{-4t}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\cdot 3t}+e^{-j\cdot 3t}\right)\cdot\sigma(t)=e^{j\cdot 3t}\cdot e^{-4t}\cdot\sigma(t)+e^{-j\cdot 3t}\cdot e^{-4t}\cdot\sigma(t)$,

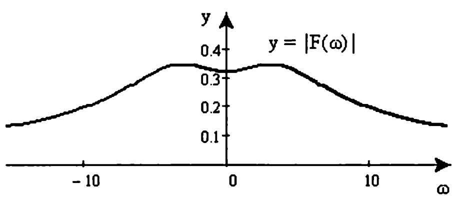
$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{4+j\cdot(\omega-3)}+\frac{1}{4+j\cdot(\omega+3)}=\frac{8+j\cdot 2\omega}{25-\omega^2+j\cdot 8\omega};$$

Amplitudendichte: $|F(j\omega)|=\frac{|8+j\cdot 2\omega|}{|25-\omega^2+j\cdot 8\omega|}=2\cdot\sqrt{\frac{\omega^2+16}{\omega^4+14\omega^2+625}}$;

$|F(j\omega)|$ ist maximal, wenn $g(\omega)=\frac{\omega^2+16}{\omega^4+14\omega^2+625}$ maximal ist.

$g'(\omega)=\frac{-2\omega\cdot(\omega^4+32\omega^2-401)}{\left(\omega^4+14\omega^2+625\right)^2}=0$; $-2\omega\cdot(\omega^4+32\omega^2-401)=0 \Rightarrow \omega=\omega_1=0$ oder
$\omega^4+32\omega^2-401=0$, also $\omega_{2,3}\approx\pm 3{,}10$. Aus der Abbildung unten ergibt sich die Art der Extremwertstellen. Minimumstelle $\omega_1=0$; Maximumstellen: $\omega_{2,3}\approx\pm 3{,}10$

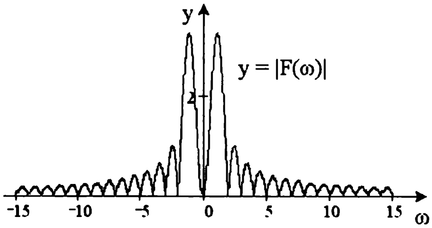




5.20 $f(t)=\frac{1}{2}e^{j\cdot t}\cdot r(t)+\frac{1}{2}e^{-j\cdot t}\cdot r(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\omega-1}\cdot\sin[\pi\cdot(\omega-1)]+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\omega+1}\cdot\sin[\pi\cdot(\omega+1)]$.

Wegen $\sin(\pi\cdot\omega-\pi)=-\sin(\pi\cdot\omega)$ und $\sin(\pi\cdot\omega+\pi)=-\sin(\pi\cdot\omega)$ folgt:

$$F(\omega)=-\sin(\pi\omega)\cdot\left[\frac{1}{\omega-1}+\frac{1}{\omega+1}\right]=\frac{2\omega}{1-\omega^2}\cdot\sin(\pi\omega)\,;\quad |F(\omega)|=\left|\frac{2\omega}{1-\omega^2}\cdot\sin(\pi\omega)\right|.$$



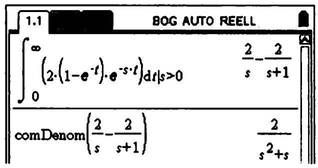
Das Spektrum erstreckt sich über alle Frequenzen ω mit einem größeren Maximum an den Stellen $\omega\approx 1$ bzw. $\omega\approx -1$. Je größer der Definitionsbereich, desto ausgeprägter sind die Extrema bei $\omega\approx 1$ bzw. $\omega\approx -1$.

5.21 **a)** $F(s)=\int_0^\infty 3\cdot e^{-s\cdot t}dt=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{3}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{3}{s}\cdot e^{-s\cdot b}\right)-\left(-\frac{3}{s}\right)=0+\frac{3}{s}=\frac{3}{s}\quad(s>0)$

b) $F(s)=\int_0^\infty e^{t}\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_0^\infty e^{-(s-1)\cdot t}dt=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s-1}\cdot e^{-(s-1)\cdot t}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s-1}\cdot e^{-(s-1)\cdot b}\right)-\left(-\frac{1}{s-1}\right)=$

$=0+\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s-1}\quad(s-1>0)$

c) $F(s)=\int_0^\infty 2\cdot\left(1-e^{-t}\right)\cdot e^{-s\cdot t}dt=2\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot t}dt+2\cdot\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{-s\cdot t}dt;$



$\int_0^\infty e^{-s\cdot t}dt=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot b}\right)-\left(-\frac{1}{s}\right)=0+\frac{1}{s}=\frac{1}{s};$

$\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_0^\infty e^{-(s+1)\cdot t}dt=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s+1}\cdot e^{-(s+1)\cdot t}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s+1}\cdot e^{-(s+1)\cdot b}\right)-\left(-\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{s+1};$

$F(s)=2\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)=\frac{2}{s\cdot(s+1)}\quad(s>0;\ \text{damit auch } s+1>0)$

5.22 Im Folgenden wird die Faktorregel und/oder die Summenregel angewendet.

a) $t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{2}{s^2}$

b) $t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2},\ 1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s}$

c) $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^3}\ \Rightarrow\ F(s)=4\cdot\frac{2}{s^3}=\frac{8}{s^3}$

d) $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$; Dämpfungssatz $\Rightarrow F(s)=\frac{2}{s+3}$

e) $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s};\ e^{-t}\cdot 1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+1}$ (Dämpfungssatz) $\Rightarrow F(s)=5\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)=\frac{5}{s\cdot(s+1)}$

f) $1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s};\ t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2},\ e^{3t}\cdot 1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-3}$ (Dämpfungssatz) $\Rightarrow F(s)=\frac{3}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s-3}$

g) $\sin(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{3}{s^2+3^2}\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{6}{s^2+9}$

h) $\cos(4t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+4^2}\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{3s}{s^2+16}$

i) $\cos(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+3^2};\ \cos(3t+\pi)=\cos(3t)\cdot\cos\pi-\sin(3t)\cdot\sin\pi=-\cos(3t);\ F(s)=-\frac{s}{s^2+9}$

j) $e^{-t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+1},\ e^{-4t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+4}\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s+4}$

k) $\sinh t=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{t}-e^{-t}\right);\ F(s)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{s^2-1}$

Mathcad: $\sinh(t)$ laplace, $t \rightarrow \frac{1}{s^2-1}$

l) $\cosh 2t=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{2t}+e^{-2t}\right);\ F(s)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}\right)=\frac{s}{s^2-4}$

$\cosh(2t)$ laplace, $t \rightarrow \frac{s}{s^2-4}$

5.23 **a)** $4t \circ\!\!-\!\!\bullet\ 4\cdot\frac{1}{s^2}$ und Dämpfungssatz $\Rightarrow F(s)=\frac{4}{(s+1)^2}$

b) $2t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\cdot\frac{2}{s^3}$ und Dämpfungssatz $\Rightarrow F(s)=\frac{4}{(s+4)^3}$

c) Korresponendenz 12 im Lehrbuch Seite 218 und Faktorregel: $4\cdot\frac{t}{2\cdot 2}\cdot\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)=\frac{4s}{\left(s^2+4\right)^2}$

d) $F(s)=U_0\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)=U_0\cdot\frac{2}{s\cdot(s+2)}$

e) $F(s)=\hat{u}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

f) $F(s)=\frac{U_0}{L}\cdot\frac{1}{(s+\delta)^2}$

g) $F(s)=\frac{U_0}{L\cdot\omega}\cdot\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}=\frac{U_0}{L}\cdot\frac{1}{(s+\delta)^2+\omega^2}$

5.24 **a)** $\sin^2 t=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2t)$; $F(s)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+2^2}\right)=\frac{2}{s\cdot(s^2+4)}$

b) $\cos^2 t=\frac{1}{2}\cdot(1+\cos 2t)$; $F(s)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2^2}\right)=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$

5.25 **a)** $t \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2}$; $t\cdot e^{-t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$

b) $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{s^3}$; $t^2\cdot e^{-t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)=\frac{2}{(s+1)^3}$

c) $\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{s^2+2^2}$; $\sin(2t)\cdot e^{-t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)=\frac{2}{(s+1)^2+4}=\frac{2}{s^2+2s+5}$

d) $\cos(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s}{s^2+3^2}$; $\cos(3t)\cdot e^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)=\frac{s}{(s+2)^2+9}=\frac{s}{s^2+4s+13}$

5.26 **a)** $F(s)=\int_1^3 2\cdot e^{-s\cdot t}dt=\left[-\frac{2}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right]_1^3=\frac{2}{s}\cdot\left(e^{-s}-e^{-3s}\right).$

Oder: Transformation von $f(t)=2\cdot[\sigma(t-1)-\sigma(t-3)$ mit Zeitverschiebungssatz:

$\sigma(t-1) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-s}\cdot\frac{1}{s}$; $\sigma(t-3) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-3s}\cdot\frac{1}{s}$; $F(s)=2\cdot\left[e^{-s}\cdot\frac{1}{s}-e^{-3s}\cdot\frac{1}{s}\right]=\frac{2}{s}\cdot\left(e^{-s}-e^{-3s}\right)$

b) $F(s)=\int_0^3 t\cdot e^{-s\cdot t}dt=\left[\left(-\frac{t}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot t}\right]_0^3=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\cdot e^{-3s}-\frac{3}{s}\cdot e^{-3s}.$

Lösungsalternative: $f(t)=t\cdot[\sigma(t)-\sigma(t-3)]=t\cdot\sigma(t)-(t-3)\cdot\sigma(t-3)]-3\cdot\sigma(t-3)$ und Zeitverschiebungssatz:

$t\cdot\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2}$; $(t-3)\cdot\sigma(t-3) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2}$; $\sigma(t-3) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-3s}\cdot\frac{1}{s}$; $F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\cdot e^{-3s}-\frac{3}{s}\cdot e^{-3s}$

c) Integraltafel „Ingenieur–Mathematik 3“, Seite 365, Nr. 33 (oder mit Hilfe eines CAS):

$\int e^{a\cdot x}\sin(b\cdot x)\,dx=\frac{e^{a\cdot x}}{a^2+b^2}\cdot[a\cdot\sin(b\cdot x)-b\cdot\cos(b\cdot x)]$ mit $a=-s$ und $b=2 \Rightarrow$

$$F(s)=\int_0^\pi \sin(2t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt=\left[\frac{e^{-s\cdot t}}{s^2+4}\cdot\left(-s\cdot\sin(2t)-2\cos(2t)\right)\right]_0^\pi=\frac{2}{s^2+4}\cdot\left(1-e^{-\pi\cdot s}\right).$$

Lösungsalternative: $f(t)=\sin(2t)\cdot[\sigma(t)-\sigma(t-\pi)]=\sin(2t)\cdot\sigma(t)-\sin[2(t-\pi)]\cdot\sigma(t-\pi)$; letzteres gilt, weil $\sin(2t)=\sin[2(t-\pi)]$; Zeitverschiebungssatz:

$\sin(2t)\cdot\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{s^2+2^2}$; $\sin[2(t-\pi)]\cdot\sigma(t-\pi) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-\pi\cdot s}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}$;

$$F(s)=\frac{2}{s^2+2^2}-e^{-\pi\cdot s}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{2}{s^2+2^2}\cdot\left(1-e^{-\pi\cdot s}\right)$$

5.26 d) $F(s)=\int_0^1 t\cdot e^{-s\cdot t}dt+\int_1^\infty 1\cdot e^{-s\cdot t}dt==\left[\left(-\frac{t}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot t}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right]_1^\infty=\frac{1}{s^2}\cdot\left(1-e^{-s}\right).$

Lösungsalternative:

$f(t)=t\cdot[\sigma(t)-\sigma(t-1)]+1\cdot\sigma(t-1)=t\cdot\sigma(t)-(t-1)\cdot\sigma(t-1)-1\cdot\sigma(t-1)+1\cdot\sigma(t-1)=$
$=t\cdot\sigma(t)-(t-1)\cdot\sigma(t-1)$; Zeitverschiebungssatz:

$t\cdot\sigma(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2}$; $(t-1)\cdot\sigma(t-1)\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-1\cdot s}\frac{1}{s^2}\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}\cdot\left(1-e^{-s}\right)$

e) $F(s)=\int_0^2(2-t)\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_0^2 2\cdot e^{-s\cdot t}dt-\int_0^2 t\cdot e^{-s\cdot t}dt=\left[-\frac{2}{s}\cdot e^{-s\cdot t}-\left(-\frac{t}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot t}\right]_0^2=$
$=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}\cdot e^{-2\cdot s}.$

Lösungsalternative: $f(t)=(2-t)\cdot[\sigma(t)-\sigma(t-2)]=2\cdot\sigma(t)-t\cdot\sigma(t)+(t-2)\cdot\sigma(t-2)$; Zeitverschieb.satz:

$2\cdot\sigma(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{s}$; $t\cdot\sigma(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2}$; $(t-2)\cdot\sigma(t-2)\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-2\cdot s}\frac{1}{s^2}\ \Rightarrow\ F(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2}\cdot e^{-2\cdot s}$

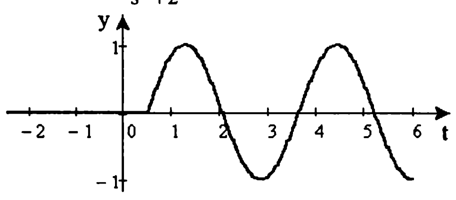
f) $F(s)=\int_1^3(3-t)\cdot e^{-s\cdot t}dt=\int_1^3 3\cdot e^{-s\cdot t}dt-\int_1^3 t\cdot e^{-s\cdot t}dt=\left[-\frac{3}{s}\cdot e^{-s\cdot t}-\left(-\frac{t}{s}-\frac{1}{s^2}\right)\cdot e^{-s\cdot t}\right]_1^3=$
$=\frac{2}{s}\cdot e^{-s}-\frac{1}{s^2}\cdot e^{-s}+\frac{1}{s^2}\cdot e^{-3\cdot s}.$

Lösungsalternative: $f(t)=(3-t)\cdot[\sigma(t-1)-\sigma(t-3)]=2\cdot\sigma(t-1)-(t-1)\cdot\sigma(t-1)+(t-3)\cdot\sigma(t-3)$;
Zeitverschiebungssatz:

$2\cdot\sigma(t-1)\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-s}\cdot\frac{2}{s}$; $(t-1)\cdot\sigma(t-1)\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2}$; $(t-3)\cdot\sigma(t-3)\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2}\ \Rightarrow$

$F(s)=\frac{2}{s}\cdot e^{-s}-\frac{1}{s^2}\cdot e^{-s}+\frac{1}{s^2}\cdot e^{-3\cdot s}$

5.27 $\sin(2t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{2}{s^2+2^2}$; $\sin[2\cdot(t-0{,}5)]\cdot\sigma(t-0{,}5)\circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)=e^{-s/2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}$, Zeitverschiebungssatz



Mathcad:

$f(t) := \sin(2\cdot t-1)\cdot\Phi(t-0.5)$

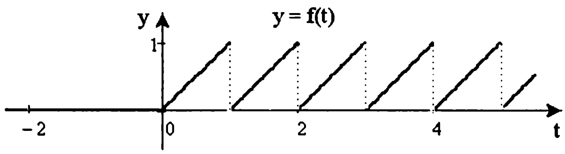
$f(t)\ \text{laplace},t\ \to\ \frac{2\cdot e^{-0.5\cdot s}}{s^2+4}$

5.28 $t\cdot\sigma(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2}$; $1\cdot\sigma(t-1)\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-1\cdot s}\cdot\frac{1}{s}$; $1\cdot\sigma(t-2)\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-2\cdot s}\cdot\frac{1}{s}$; $1\cdot\sigma(t-3)\circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-3\cdot s}\cdot\frac{1}{s}$ usw.

$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\cdot e^{-s}-\frac{1}{s}\cdot e^{-2s}-\frac{1}{s}\cdot e^{-3s}-\ldots=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\cdot e^{-s}\cdot\left(1+e^{-s}+e^{-2s}+\ldots\right).$

In den runden Klammern liegt eine geometrische Reihe mit $q=e^{-s}<1$ für $s>0$ vor:

$1+e^{-s}+e^{-2s}+\ldots=1/(1-q)=\frac{1}{1-e^{-s}}$. Daher schließlich: $F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\cdot\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}$



5.29 **a)** $3 \cdot \big(s \cdot Y(s) - y(0)\big) + 5 \cdot Y(s) = 3s \cdot Y(s) - 6 + 5 \cdot Y(s) = (3s+5) \cdot Y(s) - 6$

b) $2 \cdot \big(s \cdot Y(s) - y(0)\big) - Y(s) = 2s \cdot Y(s) - 2 - \cdot Y(s) = (2s-1) \cdot Y(s) - 2$

c) $4 \cdot \big(s \cdot Y(s) - y(0)\big) + 3 \cdot Y(s) = 4s \cdot Y(s) - 0 + 3 \cdot Y(s) = (4s+3) \cdot Y(s)$

d) $s^{2} \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + 2 \cdot \big(s \cdot Y(s) - y(0)\big) + Y(s) = s^{2} \cdot Y(s) - s \cdot 1 - 2 + 2 \cdot s \cdot Y(s) - 2 \cdot 1 + Y(s) =$
$= (s^2 + 2s + 1) \cdot Y(s) - s - 4$

e) $2 \cdot \big(s^{2} \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)\big) + 5 \cdot \big(s \cdot Y(s) - y(0)\big) + 3 \cdot Y(s) =$
$= 2s^{2} \cdot Y(s) - 2 \cdot s \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot s \cdot Y(s) - 5 \cdot 1 + 3 \cdot Y(s) = (2s^2 + 5s + 3) \cdot Y(s) - 2s - 11$

f) $4 \cdot \big(s^{2} \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0)\big) + 3 \cdot \big(s \cdot Y(s) - y(0)\big) + 5 \cdot Y(s) =$
$= 4 \cdot \big(s^{2} \cdot Y(s) - s \cdot 0 - 0\big) + 3 \cdot \big(s \cdot Y(s) - 0\big) + 5 \cdot Y(s) = (4s^2 + 3s + 5) \cdot Y(s)$

5.30 **a)** $f(t) = -1$ **b)** $f(t) = 3t$ **c)** $F(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}$; $f(t) = 2 - t$

d) $f(t) = 3 \cdot e^{4t}$ **e)** $f(t) = 5 \cdot e^{-3t}$ **f)** $F(s) = \frac{2}{s+1/2}$; $f(t) = 2 \cdot e^{-t/2}$

g) $F(s) = \frac{1}{s-1/3}$; $f(t) = e^{t/3}$ **h)** $F(s) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s-1/3}$; $f(t) = -\frac{4}{3} \cdot e^{t/3}$

i) $f(t) = \sin(4t)$ **j)** $F(s) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{s^2+16}$; $f(t) = \frac{3}{4} \cdot \sin(4t)$

k) $f(t) = 3 \cdot \cos t$ **l)** $F(s) = \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2+3^2}$; $f(t) = \frac{3}{4} \cdot \cos(3t)$

5.31 **a)** $F(s) = \frac{3}{s \cdot (s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$; $3 = A \cdot (s+1) + B \cdot s = A \cdot s + A + B \cdot s \Rightarrow A = 3; B = -3;$

$F(s) = \frac{3}{s \cdot (s+1)} = \frac{3}{s} - \frac{3}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = 3 - 3 \cdot e^{-t} = 3 \cdot (1 - e^{-t})$

b) $F(s) = \frac{3}{(s-2) \cdot (s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$; $3 = A \cdot (s+1) + B \cdot (s-2) = (A+B) \cdot s + A - 2B \Rightarrow A = 1; B = -1;$

$F(s) = \frac{3}{(s-2) \cdot (s+1)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = e^{2t} - e^{-t}$

c) $F(s) = \frac{4s}{s^2-1} = \frac{4s}{(s-1) \cdot (s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$; $4s = A \cdot (s+1) + B \cdot (s-1) = (A+B) \cdot s + A - B$

$\Rightarrow A = 2; B = 2;$ $\quad \frac{4s}{s^2-1} = \frac{2}{s-1} + \frac{2}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = 2 \cdot e^{-t} + 2 \cdot e^{t} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{t} + e^{-t}\right) = 4 \cdot \cosh t$

d) $F(s) = \frac{1-2s}{s^2-1} = \frac{1-2s}{(s-1) \cdot (s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$; $1 - 2s = A \cdot (s+1) + B \cdot (s-1) = (A+B) \cdot s + A - B$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}; \; B = -\frac{3}{2};$ $\; F(s) = \frac{1-2s}{s^2-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{B}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = -\frac{1}{2} \cdot \left(e^{t} + 3 \cdot e^{-t}\right)$

e) $s^2 + s - 2 = 0 \Rightarrow s_1 = -2; s_2 = 1;$ $s^2 + s - 2 = (s+2) \cdot (s-1);$ $F(s) = \frac{3}{(s+2) \cdot (s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1};$

$3 = A \cdot (s-1) + B \cdot (s+2);$ $A = -1; B = 1;$

$F(s) = \frac{3}{s^2+s-2} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = -e^{-2t} + e^{t}$

f) $s^2 + 4s + 4 = 0 \Rightarrow s_1 = s_2 = -2;$ $s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2;$ $F(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2};$

$s + 3 = A \cdot (s+2) + B = A \cdot s + 2A + B \Rightarrow A = 1; B = 1;$

$F(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+4} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = e^{-2t} + t \cdot e^{-2t} = (1+t) \cdot e^{-2t}$

5.31 g) $F(s)=\frac{s+1}{s^2-4s}=\frac{s+1}{s\cdot(s-4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-4}$; $s+1=A\cdot(s-4)+B\cdot s=(A+B)\cdot s-4A$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$; $B=\frac{5}{4}$; $F(s)=\frac{s+1}{s^2-4s}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s-4}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\cdot e^{4t}=\frac{1}{4}\cdot\left(-1+5\cdot e^{4t}\right)$

h) $F(s)=\frac{s+2}{s^2+2s}=\frac{s+2}{s\cdot(s+2)}=\frac{1}{s}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)=1$

i) $s^2+4s+3=0 \Rightarrow s_1=-3; s_2=-1; s^2+4s+3=(s+3)\cdot(s+1)$; $F(s)=\frac{2s+8}{(s+3)\cdot(s+1)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+1}$;

$2s+8=A\cdot(s+1)+B\cdot(s+3)=(A+B)\cdot s+A+3B \Rightarrow A=-1; B=3;$

$F(s)=\frac{2s+8}{s^2+4s+3}=-\frac{1}{s+3}+\frac{3}{s+1}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)=-e^{-3t}+3\cdot e^{-t}$

j) $F(s)=\frac{5s-2}{s^2\cdot(s+1)\cdot(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+1}+\frac{D}{s+2}$;

$5s-2=A\cdot s\cdot(s+1)\cdot(s+2)+B\cdot(s+1)\cdot(s+2)+C\cdot s^2\cdot(s+2)+D\cdot s^2\cdot(s+1)$;

Statt eines Koeffizientenvergleichs kann man hier günstiger 4 verschiedene Werte für s einsetzen, einfachheitshalber nimmt man dafür zuerst die drei Nullstellen 0, –1 und –2 des Nenners sowie noch etwa 1:

$s=0$: $5\cdot0-2=B\cdot1\cdot2 \Rightarrow B=-1$; $s=-1$: $5\cdot(-1)-2=C\cdot1^2\cdot1 \Rightarrow C=-7$;

$s=-2$: $5\cdot(-2)-2=D\cdot(-2)^2\cdot(-1) \Rightarrow D=3$;

$s=1$: $5\cdot1-2=A\cdot1\cdot2\cdot3+(-1)\cdot2\cdot3+(-7)\cdot1^2\cdot3+3\cdot1^2\cdot2$ oder $3=6A-6-21+6 \Rightarrow A=4$;

$F(s)=\frac{5s-2}{s^2\cdot(s+1)\cdot(s+2)}=\frac{4}{s}-\frac{1}{s^2}-\frac{7}{s+1}+\frac{3}{s+2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)=4-t-7\cdot e^{-t}+3\cdot e^{-2t}$

k) $F(s)=\frac{1}{(s+1)\cdot(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}$; $1=A\cdot(s+2)^2+B\cdot(s+1)\cdot(s+2)+C\cdot(s+1)$;

man kann wieder wie in j) die beiden Nullstellen –1 und –2 des Nenners und danach etwa 0 für s einsetzen: $s=-1$: $1=A\cdot1^2 \Rightarrow A=1$;

$s=-2$: $1=C\cdot(-1) \Rightarrow C=-1$;

$s=0$: $1=1\cdot2^2+B\cdot1\cdot2+(-1)\cdot1 \Rightarrow B=-1$;

$F(s)=\frac{1}{(s+1)\cdot(s+2)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)=e^{-t}-e^{-2t}-t\cdot e^{-2t}=e^{-t}-(1+t)\cdot e^{-2t}$

l) $F(s)=\frac{s^2}{(s+1)\cdot(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}$; $s^2=A\cdot(s+2)^2+B\cdot(s+1)\cdot(s+2)+C\cdot(s+1)$;

man kann die beiden Nullstellen –1 und –2 des Nenners und danach etwa 0 für s einsetzen:

$s=-1$: $(-1)^2=A\cdot1^2 \Rightarrow A=1$; $s=-2$: $(-2)^2=C\cdot(-1) \Rightarrow C=-4$;

$s=0$: $0^2=1\cdot2^2+B\cdot1\cdot2+(-4)\cdot1 \Rightarrow B=0$;

$F(s)=\frac{s^2}{(s+1)\cdot(s+2)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{4}{(s+2)^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)=e^{-t}-4\cdot t\cdot e^{-2t}$

m) $F(s)=\frac{s}{(s+2)^3}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{(s+2)^3}$; $s=A\cdot(s+2)^2+B\cdot(s+2)+C$;

man kann $s=-2$ sowie zwei weitere Werte für s, etwa 0 und –1, einsetzen:

$s=-2$: $-2=C \Rightarrow C=-2$; $s=0$: $0=A\cdot2^2+B\cdot2-2$; $s=-1$; $-1=A\cdot1^2+B\cdot1-2$;

Lösung des linearen Gleichungssystems für A und B: $A=0$; $B=1$;

$F(s)=\frac{s}{(s+2)^3}=\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{2}{(s+2)^3}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t)=t\cdot e^{-2t}-t^2\cdot e^{-2t}=t\cdot(1-t)\cdot e^{-2t}$

5.31 **n)** $s^3 + 4s^2 + 4s = s\cdot(s^2 + 4s + 4) = s\cdot(s + 2)^2$; $F(s) = \frac{3s^2+8s+8}{s^3+4s^2+4s} = \frac{3s^2+8s+8}{s\cdot(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$;

$3s^2 + 8s + 8 = A\cdot(s+2)^2 + B\cdot s\cdot(s+2) + C\cdot s$; man kann die beiden Nullstellen 0 und –2 des Nenners sowie etwa 1 für s einsetzen: $s = 0$: $8 = A\cdot 2^2 \Rightarrow A = 2$;

$s = -2$: $3\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) + 8 = C\cdot(-2) \Rightarrow C = -2$;

$s = 1$: $3 + 8 + 8 = 2\cdot 3^2 + B\cdot 1\cdot 3 + (-2)\cdot 1 \Rightarrow B = 1$;

$$F(s) = \frac{3s^2+8s+8}{s^3+4s^2+4s} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

$\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t) = 2 + e^{-2t} - t\cdot e^{-2t}$

Mathcad:

$$\frac{3s^2 + 8s + 8}{s^3 + 4s^2 + 4s} \text{ invlaplace}, s \rightarrow e^{-2\cdot t} - 2\cdot t\cdot e^{-2\cdot t} + 2$$

5.32 **a)** $s^2 - 2s + 10 = 0 \Rightarrow s_1 = 1 + 3j$; $s_2 = 1 - 3j$; keine reellen Lösungen;

$s^2 - 2s + 10 = s^2 - 2s + 1 - 1 + 10 = (s-1)^2 + 9 = (s-1)^2 + 3^2$;

$$F(s) = 3\cdot\frac{s}{(s-1)^2+3^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = 3\cdot e^t\cdot\left[\cos(3t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3t)\right] = e^t\cdot[3\cdot\cos(3t) + \sin(3t)],$$

Korrespondenz Nr. 9, Lehrbuch Seite 218

b) $s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow s_1 = -1 + j$; $s_2 = -1 - j$; keine reellen Lösungen;

$s^2 + 2s + 1 - 1 + 2 = (s+1)^2 + 1$;

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} = \frac{s}{(s+1)^2+1^2} + \frac{1}{(s+1)^2+1^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = e^{-t}\cdot[\cos t - \sin t] + e^{-t}\cdot\sin t = e^{-t}\cdot\cos t$$

Korrespondenz Nr. 9 und 8 oder Korrespondenz Nr. 7 und Dämpfungssatz, Lehrbuch Seite 218

c) $F(s) = \frac{10}{(2s+1)\cdot(s^2+1)} = \frac{A}{2s+1} + \frac{B\cdot s+C}{s^2+1}$;

$10 = A\cdot(s^2+1) + (B\cdot s+C)\cdot(2s+1) = (A+2B)\cdot s^2 + (B+2C)s + A + C$

$\Rightarrow A + 2B = 0$ und $B + 2C = 0$ und $A + C = 10$; daraus $A = 8$; $B = -4$; $C = 2$;

$$F(s) = \frac{10}{(2s+1)\cdot(s^2+1)} = \frac{4}{s+1/2} - 4\cdot\frac{s}{s^2+1} + 2\cdot\frac{1}{s^2+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = 4\cdot e^{-t/2} - 4\cdot\cos t + 2\cdot\sin t$$

d) $F(s) = \frac{74}{(3s+1)\cdot(s^2+4)} = \frac{A}{3s+1} + \frac{B\cdot s+C}{s^2+4}$;

$74 = A\cdot(s^2 + 4) + (B\cdot s + C)\cdot(3s + 1) = (A + 3B)\cdot s^2 + (B + 3C)\cdot s + 4A + C$

$\Rightarrow$ $A + 3B = 0$ und $A + 3B = 0$ und $4A + C = 74$; daraus $A = 18$; $B = -6$; $C = 2$;

$$F(s) = \frac{74}{(3s+1)\cdot(s^2+4)} = 6\cdot\frac{1}{s+1/3} - 6\cdot\frac{s}{s^2+2^2} + 2\cdot\frac{1}{s^2+2^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = 6\cdot e^{-t/3} - 6\cdot\cos(2t) + \sin(2t)$$

e) $s^4 + s^3 - 2s = s\cdot(s^3 + s^2 - 2) = 0 \Rightarrow s_1 = 0$ oder $s^3 + s^2 - 2 = 0$.

$$\begin{array}{l}
(s^3 + s^2 - 2) : (s - 1) = s^2 + 2s + 2 \\
\underline{-s^3 \mp s^2} \\
\quad 2s^2 - 2 \\
\quad \underline{-2s^2 \mp 2s} \\
\qquad 2s - 2 \\
\qquad \underline{-2s \mp 2} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

In der Gleichung $s^3 + s^2 - 2 = 0$ kann 1 als Lösung leicht erraten werden: $s_2 = 1$;
Polynomdivision $(s^3 + s^2 - 2)$: $(s - 1) = s^2 + 2s + 2$ (siehe Ingenieur-Mathematik 1, Seite 84 f.);
$s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow s_3 = -1 + j$; $s_4 = -1 - j$, keine reellen Lösungen; somit: $s^4 + s^3 - 2s = s\cdot(s-1)\cdot(s^2 + 2s + 2)$.

$$F(s) = \frac{s^2-2s-4}{s^4+s^2-2s} = \frac{s^2-2s-4}{s\cdot(s-1)\cdot(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C\cdot s+D}{s^2+2s+2};$$

$s^2 - 2s - 4 = A\cdot(s-1)\cdot(s^2+2s+2) + B\cdot s\cdot(s^2 + 2s + 2) + (C\cdot s + D)\cdot s\cdot(s-1) =$

$= (A + B + C)\cdot s^3 + (A + 2B - C + D)\cdot s^2 + (2B - D)\cdot s - 2A \Rightarrow$

$A + B + C = 0$ und $A + 2B - C + D = 1$ und $2B - D = -2$ und $-2A = -4$;

daraus $A = 2$; $B = -1$; $C = -1$; $D = 0$;

$s^2 + 2s + 2 = s^2 + 2s + 1 - 1 + 2 = (s+1)^2 + 1$;

$$F(s) = 2\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+2s+2} = 2\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{s}{(s+1)^2+1^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = 2 - e^t + e^{-t}\cdot(\cos t - \sin t)$$

5.32 **f)** $s^4 + 4s^2 = s^2\cdot(s^2+4)$; $F(s) = \frac{-8\cdot(2s+1)}{s^2\cdot(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C\cdot s+D}{s^2+4}$;

$-16s - 8 = A\cdot s\cdot(s^2+4) + B\cdot(s^2+4) + (C\cdot s + D)\cdot s^2 = (A+C)\cdot s^3 + (B+D)\cdot s^2 + 4A\cdot s + 4\cdot B$

$\Rightarrow A + C = 0$ und $B + D = 0$ und $4A = -16$ und $4\cdot B = -8$;

daraus $A = -4$; $B = -2$; $C = 4$; $D = 2$;

$F(s) = -4\cdot\frac{1}{s} - 2\cdot\frac{1}{s^2} + 4\cdot\frac{s}{s^2+4} + 2\cdot\frac{1}{s^2+4}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t) = -4 - 2t + 4\cdot\cos(2t) + \sin(2t)$

g) $F(s) = \frac{2}{s\cdot(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B\cdot s+C}{s^2+4}$; $2 = A\cdot(s^2+4) + (B\cdot s + C)\cdot s = (A+B)\cdot s^2 + C\cdot s + 4A$

$\Rightarrow A + B = 0$ und $C = 0$ und $4A = 2$; daraus $A = \frac{1}{2}$; $B = -\frac{1}{2}$; $C = 0$;

$F(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+2^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2t) = \frac{1}{2}\cdot[1-\cos(2t)] = \sin^2 t$.

Hier wurde Gebrauch gemacht, dass $1 = \sin^2 t + \cos^2 t$ sowie $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$.

h) $F(s) = \frac{s^2+2}{s\cdot(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B\cdot s+C}{s^2+4}$; $s^2 + 2 = A\cdot(s^2+4) + (B\cdot s + C)\cdot s = (A+B)\cdot s^2 + C\cdot s + 4A$

$\Rightarrow A + B = 1$ und $C = 0$ und $4A = 2$; daraus $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{2}$; $C = 0$;

$F(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+2^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos(2t) = \frac{1}{2}\cdot[1+\cos(2t)] = \cos^2 t$.

Hier wurde Gebrauch gemacht, dass $1 = \sin^2 t + \cos^2 t$ sowie $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$.

i) $F(s) = \frac{8}{s^2\cdot(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C\cdot s+D}{s^2+4}$;

$8 = A\cdot s\cdot(s^2+4) + B\cdot(s^2+4) + (C\cdot s + D)\cdot s^2 = (A+C)\cdot s^3 + (B+D)\cdot s^2 + 4A\cdot s + 4B$

$\Rightarrow A+C = 0$ und $B+D = 0$ und $4A = 0$ und $4B = 8$; daraus $A = 0$; $B = 2$; $C = 0$; $D = -2$;

$F(s) = 2\cdot\frac{1}{s^2} - 2\cdot\frac{1}{s^2+2^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $f(t) = 2t - \sin(2t)$

5.33 **a)** $\mathcal{L}\{y'+y\} = \mathcal{L}\{1\}$

$s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{2} + Y(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s)\cdot(s+1) = \frac{1+2s}{s}$ oder $Y(s) = \frac{2s+1}{s\cdot(s+1)}$;

$\frac{2s+1}{s\cdot(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$ $\Rightarrow$ $A = 1$; $B = 1$

$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t) = 1 + e^{-t}$

b) $\mathcal{L}\{y'+y\} = \mathcal{L}\{2\}$

$s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{1} + Y(s) = \frac{2}{s}$

$Y(s)\cdot(s+1) = \frac{2+s}{s}$ oder $Y(s) = \frac{s+2}{s\cdot(s+1)}$

$\frac{s+2}{s\cdot(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$ $\Rightarrow$ $A = 2$; $B = -1$

$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t) = 2 - e^{-t}$

c) $\mathcal{L}\{y'+4y\} = \mathcal{L}\{12\}$

$s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{2} + 4\cdot Y(s) = \frac{12}{s}$

$Y(s)\cdot(s+4) = \frac{12+2s}{s}$ oder $Y(s) = \frac{2s+12}{s\cdot(s+4)}$

$\frac{2s+12}{s\cdot(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$ $\Rightarrow$ $A = 3$; $B = -1$

$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s+4}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t) = 3 - e^{-4t}$

d) $\mathcal{L}\{y'+2y\} = \mathcal{L}\{4t\}$

$s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{1} + 2\cdot Y(s) = \frac{4}{s^2}$

$Y(s)\cdot(s+2) = \frac{4+s^2}{s^2}$ oder $Y(s) = \frac{s^2+4}{s^2\cdot(s+2)}$

$\frac{s^2+4}{s^2\cdot(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$ $\Rightarrow$ $A = -1$; $B = 2$; $C = 2$

$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t) = -1 + 2t + 2\cdot e^{-t}$

5.33 **e)** $L\{y'+2y\}=L\{2t-3\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0}+2\cdot Y(s)=\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}$; $Y(s)=\frac{-3s+2}{s^2\cdot(s+2)}$

$$\frac{-3s+2}{s^2\cdot(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2} \Rightarrow A=-2;\ B=1;\ C=2$$

$$Y(s)=-\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t)=-2+t+2\cdot e^{-2t}$$

f) $L\{y'-2y\}=L\{2-4t^2\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{5}-2\cdot Y(s)=\frac{2}{s}-\frac{8}{s^3}$; $Y(s)=\frac{5s^3+2s^2-8}{s^3\cdot(s-2)}$

$$\frac{5s^3+2s^2-8}{s^3\cdot(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s-2} \Rightarrow A=0;\ B=2;\ C=4;\ D=5$$

$$Y(s)=\frac{2}{s^2}+\frac{4}{s^3}+\frac{5}{s-2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t)=2t+2t^2+5\cdot e^{2t}=2t\cdot(1+t)+5\cdot e^{2t}$$

g) $L\{y'+y\}=L\{2\cdot e^t\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{3}+Y(s)=\frac{2}{s-1}$; $Y(s)=\frac{3s-1}{(s-1)\cdot(s+1)}$

$$\frac{3s-1}{(s-1)\cdot(s+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1} \Rightarrow A=1;\ B=2$$

$$Y(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s+1} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t)=e^t+2\cdot e^{-t}$$

h) $L\{y'+y\}=L\{2+e^{-t}\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{1}+Y(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{s+1}$; $Y(s)=\frac{s^2+4s+2}{s\cdot(s+1)^2}$

$$\frac{s^2+4s+2}{s\cdot(s+1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2} \Rightarrow A=2;\ B=-1;\ C=1$$

$$Y(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t)=2-e^{-t}+t\cdot e^{-t}=2+(t-1)\cdot e^{-t}$$

i) $L\{y'+3y\}=L\{4t\cdot e^{-t}\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{4}+3\cdot Y(s)=\frac{4}{(s+1)^2}$; $Y(s)=\frac{4(s^2+2s+2)}{(s+1)^2\cdot(s+3)}$

$$\frac{4(s^2+2s+2)}{(s+1)^2\cdot(s+3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+3} \Rightarrow A=-1;\ B=2;\ C=5$$

$$Y(s)=-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{5}{s+3} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t)=-e^{-t}+2t\cdot e^{-t}+5\cdot e^{-3t}=(2t-1)\cdot e^{-t}+5\cdot e^{-3t}$$

j) $L\{y'+2y\}=L\{2+t\cdot e^{-t}\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{1}+2Y(s)=\frac{2}{s}+\frac{1}{(s+1)^2}$; $Y(s)=\frac{s^3+4s^2+6s+2}{s\cdot(s+1)^2\cdot(s+2)}$

$$\frac{s^3+4s^2+6s+2}{s\cdot(s+1)^2\cdot(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{D}{s+2} \Rightarrow A=1;\ B=-1;\ C=1;\ D=1$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t)=1-e^{-t}+t\cdot e^{-t}+e^{-2t}=1+(t-1)\cdot e^{-t}+e^{-2t}$$

5.34 $L\{y'+2y\}=L\{4\}$; $s\cdot Y(s)-y(0)+2\cdot Y(s)=\frac{4}{s}$; $y(0)=y_0$; $Y(s)=\frac{y_0\cdot s+4}{s\cdot(s+2)}$

$$\frac{y_0\cdot s+4}{s\cdot(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2} \Rightarrow A=2,\ B=y_0-2$$

$$Y(s)=\frac{2}{s}+\frac{y_0-2}{s+2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t)=2+(y_0-2)\cdot e^{-2t}$$

$y(1)=2+(y_0-2)\cdot e^{-2\cdot 1}=3 \Rightarrow y_0=2+e^2$; $y(t)=2+(2+e^2-2)\cdot e^{-2t}=2+e^{2\cdot(1-t)}$

Die Lösung $y(t)=2+e^{2\cdot(1-t)}$ erfüllt die Anfangbedingung $y(1)=3$.

Zur Erinnerung:
$a\cdot\sin\alpha + b\cdot\cos\alpha = A\cdot\sin(\alpha+\varphi)$ mit $A=\sqrt{a^2+b^2}$ und $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$
mit Berücksichtigung des richtigen Quadranten für φ !

5.35 **a)** $\mathcal{L}\{y'+y\}=\mathcal{L}\{2\cdot\sin t\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{1}+Y(s)=\frac{2}{s^2+1}$; $Y(s)=\frac{s^2+3}{(s+1)\cdot(s^2+1)}$

$$\frac{s^2+3}{(s+1)\cdot(s^2+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+1} \Rightarrow A=2;\ B=-1;\ C=1$$

$$Y(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ 2\cdot e^{-t}-\cos t+\sin t = 2\cdot e^{-t}+A\cdot\sin(t+\varphi) \text{ mit}$$

$A=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ und $\varphi=\arctan\frac{-1}{1}=-45°$; also auch $y(t)=\sqrt{2}\cdot\sin(t-45°)+2\cdot e^{-t}$.

b) $\mathcal{L}\{y'+2y\}=\mathcal{L}\{5\cdot\cos t\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0}+2Y(s)=\frac{5s}{s^2+1}$; $Y(s)=\frac{5s}{(s+2)\cdot(s^2+1)}$

$$\frac{5s}{(s+2)\cdot(s^2+1)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+1} \Rightarrow A=-2;\ B=2;\ C=1$$

$$Y(s)=-\frac{2}{s+2}+2\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=-2\cdot e^{-2t}+2\cdot\cos t+\sin t = \sqrt{5}\cdot\sin\left(t+63{,}4°\right)-2\cdot e^{-2t}$$

c) $\mathcal{L}\{y'+3y\}=\mathcal{L}\{12\cdot\cos(3t)\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0}+3Y(s)=\frac{12s}{s^2+9}$; $Y(s)=\frac{12s}{(s+3)\cdot(s^2+9)}$

$$\frac{12s}{(s+3)\cdot(s^2+9)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+9} \Rightarrow A=-2;\ B=2;\ C=6$$

$$Y(s)=-\frac{2}{s+3}+\frac{2\cdot s}{s^2+9}+\frac{6}{s^2+9}=-\frac{2}{s+3}+\frac{2\cdot s}{s^2+3^2}+2\cdot\frac{3}{s^2+3^2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=-2\cdot e^{-3t}+2\cdot\cos(3t)+2\cdot\sin(3t) = \sqrt{8}\cdot\sin\left(t+45°\right)-2\cdot e^{-3t}$$

d) $\mathcal{L}\{y'+3y\}=\mathcal{L}\{6\cdot\sin(3t)\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{2}+3Y(s)=\frac{6\cdot 3}{s^2+9}$; $Y(s)=\frac{2\cdot s^2+18}{(s+3)\cdot(s^2+9)}$

$$\frac{2s^2+18}{(s+3)\cdot(s^2+9)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+9} \Rightarrow A=3;\ B=-1;\ C=3$$

$$Y(s)=\frac{3}{s+3}-\frac{s}{s^2+9}+\frac{3}{s^2+9} \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=-3e^{-3t}-\cos(3t)+\sin(3t)=\sqrt{2}\cdot\sin(3t-45°)-3\cdot e^{-3t}$$

e) $\mathcal{L}\{y'+10y\}=\mathcal{L}\{52\cdot\sin(2t)\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{1}+10\cdot Y(s)=\frac{104}{s^2+4}$; $Y(s)=\frac{s^2+108}{(s^2+4)\cdot(s+10)}$

$$\frac{s^2+108}{(s^2+4)\cdot(s+10)}=\frac{A}{s+10}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+4} \Rightarrow A=2;\ B=-1;\ C=10$$

$$Y(s)=\frac{2}{s+10}-\frac{s}{s^2+4}+\frac{10}{s^2+4} \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=2\cdot e^{-10t}-\cos(2t)+5\cdot\sin(2t)=\sqrt{26}\cdot\sin(2t-11{,}3°)+2\cdot e^{-10t}$$

f) $\mathcal{L}\{y'+2y\}=\mathcal{L}\{4\cdot\cos(2t)\}$; $s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{2}+2\cdot Y(s)=\frac{4s}{s^2+4}$; $Y(s)=\frac{2s^2+4s+8}{(s^2+4)\cdot(s+2)}$

$$\frac{2s^2+4s+8}{(s^2+4)\cdot(s+2)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+4} \Rightarrow A=1;\ B=1;\ C=2$$

$$Y(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{s}{s^2+4}+\frac{2}{s^2+4} \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=e^{-2t}+\cos(2t)+\sin(2t)=\sqrt{2}\cdot\sin(2t+45°)+e^{-2t}$$

5.35 **g)** $L\{y' + y\} = L\,\{\sin t + 3\cdot\cos t\}$; $s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{0} + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{3s}{s^2+1}$; $Y(s) = \frac{3s+1}{(s+1)\cdot(s^2+1)}$

$$\frac{3s+1}{(s+1)\cdot(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B\cdot s+C}{s^2+1} \;\Rightarrow\; A = -1;\; B = 1;\; C = 2$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = -e^{-t} + \cos t + 2\cdot\sin t = \sqrt{5}\cdot\sin(t + 26{,}6°) - e^{-t}$$

h) $L\{y' + y\} = L\,\{8\cdot\sin t + 6\cdot\cos t\}$; $s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{0} + Y(s) = \frac{8}{s^2+1} + \frac{6s}{s^2+1}$; $Y(s) = \frac{6s+8}{(s+1)\cdot(s^2+1)}$

$$\frac{6s+8}{(s+1)\cdot(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B\cdot s+C}{s^2+1} \;\Rightarrow\; A = 1;\; B = -1;\; C = 7$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{7}{s^2+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = e^{-t} - \cos t + 7\cdot\sin t = \sqrt{50}\cdot\sin(t - 8{,}1°) + e^{-t}$$

5.36 **a)** $L\{y'' + 6y' + 5y\} = L\,\{0\}$; $s^2\cdot Y(s) - s\cdot\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{4} + 6\cdot(s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{0}) + 5\cdot Y(s) = 0$;

$Y(s) = \frac{4}{s^2+6s+5}$; $s^2 + 6s + 5 = 0 \Rightarrow s_1 = -5$; $s_2 = -1$; $s^2 + 6s + 5 = (s+5)\cdot(s+1)$;

$$\frac{4}{(s+5)\cdot(s+1)} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s+1} \;\Rightarrow\; A = -1;\; B = 1;$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s+5} + \frac{1}{s+1} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = -e^{-5t} + e^{-t}$$

b) $L\{y'' + 8y' + 12y\} = L\,\{0\}$; $s^2\cdot Y(s) - s\cdot\underbrace{y(0)}_{10} - \underbrace{y'(0)}_{8} + 8\cdot(s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{10}) + 12\cdot Y(s) = 0$;

$Y(s) = \frac{10s+88}{s^2+8s+12}$; $s^2 + 8s + 12 = 0 \Rightarrow s_1 = -6$; $s_2 = -2$; $s^2 + 6s + 5 = (s+6)\cdot(s+2)$;

$$\frac{10s+88}{(s+6)\cdot(s+2)} = \frac{A}{s+6} + \frac{B}{s+2} \;\Rightarrow\; A = -7;\; B = 17;$$

$$Y(s) = -\frac{7}{s+6} + \frac{17}{s+2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = -7\cdot e^{-6t} + 17\,e^{-2t}$$

c) $L\{y'' + 4y' + 8y\} = L\,\{0\}$; $s^2\cdot Y(s) - s\cdot\underbrace{y(0)}_{1} - \underbrace{y'(0)}_{0} + 4\cdot(s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{1}) + 8\cdot Y(s) = 0$;

$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+8}$; $s^2 + 4s + 8 = 0 \Rightarrow s_1 = -2 + 2j$; $s_2 = -2 - 2j$; keine reellen Lösungen;

$s^2 + 4s + 8 = s^2 + 4s + 4 - 4 + 8 = (s+2)^2 + 2^2$;

$$Y(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2+2^2} = \frac{s}{(s+2)^2+2^2} + \frac{4}{(s+2)^2+2^2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = e^{-2t}\cdot[\cos(2t) - \sin(2t)] + 2\cdot e^{-2t}\sin(2t) = e^{-2t}\cdot[\sin(2t) + \cos(2t)] = \sqrt{2}\cdot e^{-2t}\sin(2t + 45°)$$

d) $L\{y'' + 10y' + 26y\} = L\,\{0\}$; $s^2\cdot Y(s) - s\cdot\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{2} + 10\cdot(s\cdot Y(s) - \underbrace{y(0)}_{0}) + 26\cdot Y(s) = 0$;

$Y(s) = \frac{2}{s^2+10s+26}$; $s^2 + 10s + 26 = 0 \Rightarrow s_1 = -5 + j$; $s_2 = -5 - j$; keine reellen Lösungen;

$s^2 + 10s + 26 = s^2 + 10s + 25 - 25 + 26 = (s + 5)^2 + 1$;

$$Y(s) = \frac{2}{(s+5)^2+1} = \frac{2}{(s+5)^2+1^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad y(t) = 2\cdot e^{-5t}\cdot\sin t$$

e) $L\{y''+8y'+20y\}=L\{0\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{1}-\underbrace{y'(0)}_{0}+8\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{1})+20\cdot Y(s)=0$;

$Y(s)=\dfrac{s+8}{s^2+8s+20}$; $s^2+8s+20=0 \Rightarrow s_1=-4+2j;\ s_2=-4-2j$; keine reellen Lösungen;

$s^2+8s+20=s^2+8s+16-16+20=(s+4)^2+4$

$$Y(s)=\frac{s+8}{(s+4)^2+2^2}=\frac{s}{(s+4)^2+2^2}+\frac{8}{(s+4)^2+2^2}$$

$\bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=e^{-4t}\cdot[\cos(2t)-2\cdot\sin(2t)]+4\cdot e^{-4t}\sin(2t)=$

$=e^{-4t}\cdot[2\cdot\sin(2t)+\cos(2t)]=\sqrt{5}\,e^{-4t}\sin(2t+26{,}6°)$

f) $L\{y''+\omega^2\cdot y\}=L\{0\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{r}-\underbrace{y'(0)}_{0}+\omega^2\cdot Y(s)=0$;

$Y(s)=\dfrac{r\cdot s}{s^2+\omega^2}=r\cdot\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t)=r\cdot\cos(\omega t)$

5.37 a–a) $L\{y''+8y'+7y\}=L\{14\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{6}-\underbrace{y'(0)}_{2}+8\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{6})+7\cdot Y(s)=\dfrac{14}{s}$;

$Y(s)=\dfrac{6s^2+50s+14}{s^3+8s^2+7s}$; $s^3+8s^2+7s=s\cdot(s^2+8s+7)=0$

$\Rightarrow s_1=0$ oder $s^2+8s+7=0$; $s^2+8s+7=0 \Rightarrow s_2=-7;\ s_3=-1$;

$s^3+8s^2+7s=s\cdot(s+7)\cdot(s+1)$; $\dfrac{6s^2+50s+14}{s\cdot(s+7)\cdot(s+1)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+7}+\dfrac{C}{s+1} \Rightarrow A=2;\ B=-1;\ C=5$

$Y(s)=\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s+7}+\dfrac{5}{s+1}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(x)=2-e^{-7x}+5\cdot e^{-x}$

a–b) $L\{y''+2y'+y\}=L\{2x+1\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{a}-\underbrace{y'(0)}_{b}+2\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{a})+Y(s)=\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{1}{s}$;

abkürzend wurde hier $a=y(0)$ und $b=y'(0)$ gesetzt. Die Lösung erfolgt nun mit vorerst noch unbekannten Anfangswerten $y(0)$ und $y'(0)$.

$Y(s)=\dfrac{as^3+(2s+b)\cdot s^2+s+2}{s^4+2s^3+s^2}$; $s^4+2s^3+s^2=s^2\cdot(s^2+2s+1)=s^2\cdot(s+1)^2$;

$\dfrac{as^3+(2s+b)\cdot s^2+s+2}{s^2\cdot(s+1)^2}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s+1}+\dfrac{D}{(s+1)^2} \Rightarrow A=-3;\ B=2;\ C=a+3;\ D=a+b+1$

$Y(s)=-\dfrac{3}{s}+\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{a+3}{s+1}+\dfrac{a+b+1}{(s+1)^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(x)=-3+2x+(a+3)\cdot e^{-x}+(a+b+1)\cdot x\cdot e^{-x}$;

$y'(x)=2-(a+3)\cdot e^{-x}+(a+b+1)\cdot(1-x)\cdot e^{-x}$;

$y(1)=-3+2\cdot1+(a+3)\cdot e^{-1}+(a+b+1)\cdot1\cdot e^{-1}=0$ und $y'(1)=2-(a+3)\cdot e^{-1}+(a+b+1)\cdot(1-1)\cdot e^{-1}=3$;

Lösung dieses linearen Gleichungssystems: $a=-e-3$; $b=3e+2$;

$y(x)=-3+2x-e\cdot e^{-x}+2e\cdot x\cdot e^{-x}=2x-3-e^{-x+1}+2x\cdot e^{-x+1}=2x-3+(2x-1)\cdot e^{-x+1}$

a–c) $L\{y''+4y'+3y\}=L\{130\cdot\sin(2x)\}$;

$s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{2}-\underbrace{y'(0)}_{0}+4\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{2})+3\cdot Y(s)=\dfrac{260}{s^2+4}$; $Y(s)=\dfrac{2s^3+8s^2+8s^2+292}{(s^2+4)\cdot(s^2+4s+3)}$;

$s^2+4s+3=0 \Rightarrow s_1=-3;\ s_2=-1$; $s^2+4s+3=(s+1)\cdot(s+3)$;

$\dfrac{2s^3+8s^2+8s^2+292}{(s^2+4)\cdot(s+1)\cdot(s+3)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s+3}+\dfrac{C\cdot s+D}{s^2+4} \Rightarrow A=29;\ B=-11;\ C=-16;\ D=-4$;

$Y(s)=\dfrac{29}{s+1}-\dfrac{11}{s+3}-\dfrac{16s}{s^2+4}-\dfrac{4}{s^2+4}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(x)=29\cdot e^{-x}-11\cdot e^{-3x}-16\cdot\cos(2x)-2\cdot\sin(2x)$

5.37 a–d) $L\{y''+9y\}=L\{6\cdot\cos(3x)\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{1}-\underbrace{y'(0)}_{0}+9\cdot Y(s)=\dfrac{6s}{s^2+9}$; $Y(s)=\dfrac{s^3+15s}{(s^2+9)^2}$;

$$\frac{s^3+15s}{(s^2+9)^2}=\frac{A\cdot s+B}{s^2+9}+\frac{C\cdot s+D}{(s^2+9)^2} \Rightarrow A=1;\ B=0;\ C=6;\ D=0;$$

$Y(s)=\dfrac{s}{s^2+9}+\dfrac{6s}{(s^2+9)^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(x)=\cos(3x)+x\cdot\sin(3x)$; (Korresp. 12, Lehrbuch Seite 218)

b–a) $L\{\ddot{y}+16y\}=L\{0\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{1,2}+16\cdot Y(s)=0$; $Y(s)=\dfrac{1,2}{s^2+16}$

$Y(s)=\dfrac{1,2}{s^2+4^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t)=0,3\cdot\sin(4t)$ in Meter

b–b) $L\{\ddot{y}+\dot{y}+16y\}=L\{0\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{1,2}+s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0}+16\cdot Y(s)=0$;

$Y(s)=\dfrac{1,2}{s^2+s+16}$; $s^2+s+16=0 \Rightarrow s_1=-0,5+3,97j$; $s_2=-0,5-3,97j$; keine reellen Lösungen; $s^2+s+16=s+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot s+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}+16=\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{63}{4}$;

$$Y(s)=\frac{1,2}{(s+1/2)^2+63/4}\approx\frac{1,2}{(s+1/2)^2+3,97^2}$$

$\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t)=\dfrac{1,2}{3,97}\cdot e^{-t/2}\cdot\sin(3,97t)=0,302\cdot e^{-t/2}\cdot\sin(3,97t)$ in Meter

b–c) $L\{\ddot{y}+10\dot{y}+16y\}=L\{0\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{1,2}+10\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0})+16\cdot Y(s)=0$;

$Y(s)=\dfrac{1,2}{s^2+10s+16}$; $s^2+10s+16=0 \Rightarrow s_1=-8$; $s_2=-2$; $s^2+10s+16=(s+2)\cdot(s+8)$;

$$\frac{1,2}{(s+2)\cdot(s+8)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+8} \Rightarrow A=0,2;\ B=-0,2;$$

$Y(s)=\dfrac{0,2}{s+2}-\dfrac{0,2}{s+8}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t)=0,2\cdot(e^{-2t}-e^{-8t})$ in Meter

b–d) $L\{\ddot{y}+8\dot{y}+16y\}=L\{0\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{1,2}+8\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0})+16\cdot Y(s)=0$;

$Y(s)=\dfrac{1,2}{s^2+8s+16}=\dfrac{1,2}{(s+4)^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t)=1,2\cdot t\cdot e^{-4t}$ in Meter

5.38 a) $L\{\ddot{y}+4\dot{y}+85y\}=L\{0\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{9}+4\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0})+85\cdot Y(s)=0$;

$Y(s)=\dfrac{9}{s^2+4s+85}$; $s^2+4s+85=0 \Rightarrow s_1=-2+9j$; $s_2=-2-9j$; keine reellen Lösungen;

$s^2+4s+85=s^2+4s+4-4+85=(s+2)^2+81$;

$Y(s)=\dfrac{9}{(s+2)^2+9^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t)=e^{-2t}\cdot\sin(9t)$

b) $L\{\ddot{y}+8\dot{y}+7y\}=L\{0\}$; $s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{6}-\underbrace{y'(0)}_{0}+8\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{6})+7\cdot Y(s)=0$;

$Y(s)=\dfrac{6s+48}{s^2+8s+7}$; $s^2+8s+7=0 \Rightarrow s_1=-1$; $s_2=-7$; $s^2+8s+7=(s+1)\cdot(s+7)$;

$\dfrac{6s+48}{(s+1)\cdot(s+7)}=\dfrac{A}{s+1}+\dfrac{B}{s+7} \Rightarrow A=7;\ B=-1;$ $Y(s)=\dfrac{7}{s+1}-\dfrac{1}{s+7}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $y(t)=7\cdot e^{-t}-e^{-7t}$

5.38 **c)** $L\{\ddot{y}+8\dot{y}+160y\}=L\{0\};\quad s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{3}-\underbrace{y'(0)}_{0}+8\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{3})+160\cdot Y(s)=0;$

$Y(s)=\frac{3s+24}{s^2+8s+160}$; $s^2+8s+160=0 \Rightarrow s_1=-4+12j$; $s_2=-4-12j$; keine reellen Lösungen;

$s^2+8s+160=s^2+8s+16-16+160=(s+4)^2+12^2$;

$$Y(s)=\frac{3s+24}{(s+4)^2+12^2}=\frac{3s}{(s+4)^2+12^2}+\frac{24}{(s+4)^2+12^2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t)=3\cdot e^{-4t}\cdot\left[\cos(12t)-\frac{1}{3}\cdot\sin(12t)\right]+2\cdot e^{-4t}\cdot\sin(12t)=e^{-4t}\cdot[\sin(12t)+3\cdot\cos(12t)]=$$

$$=\sqrt{10}\cdot e^{-4t}\cdot\sin(12t+71{,}6°)$$

d) $L\{\ddot{y}+3\dot{y}+2y\}=L\{0\};\quad s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{-4}+3\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0})+2\cdot Y(s)=0;$

$Y(s)=-\frac{4}{s^2+3s+2}$; $s^2+3s+2=0 \Rightarrow s_1=-1$; $s_2=-2$; $s^2+3s+2=(s+1)\cdot(s+2)$;

$-\frac{4}{(s+1)\cdot(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2} \Rightarrow A=-4;\; B=4;$

$Y(s)=\frac{-4}{s+1}+\frac{4}{s+2}\quad \bullet\!\!-\!\!\circ\quad y(t)=4\cdot(e^{-2t}-e^{-t})$

5.39 **a)** $L\{\ddot{y}+10\dot{y}+16y\}=L\{48\};\quad s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{0}+10\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0})+16\cdot Y(s)=\frac{48}{s};$

$Y(s)=\frac{48}{s\cdot(s^2+10s+16)}$; $s^2+10s+16=0 \Rightarrow s_1=-2$; $s_2=-8$; $s^2+10s+16=(s+2)\cdot(s+8)$;

$\frac{48}{s\cdot(s+2)\cdot(s+8)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+8} \Rightarrow A=3;\; B=-4;\; C=1$

$Y(s)=\frac{3}{s}-\frac{4}{s+2}+\frac{1}{s+8}\qquad y(t)=3-4\cdot e^{-2t}+e^{-8t}$

b) $L\{\ddot{y}+10\dot{y}+24y\}=L\{24\};\quad s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{0}+10\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0})+24\cdot Y(s)=\frac{24}{s};$

$Y(s)=\frac{24}{s\cdot(s^2+10s+24)}$; $s^2+10s+24=0 \Rightarrow s_1=-4$; $s_2=-6$; $s^2+10s+24=(s+4)\cdot(s+6)$;

$\frac{24}{s\cdot(s+4)\cdot(s+6)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+4}+\frac{C}{s+6} \Rightarrow A=1;\; B=-3;\; C=2;$

$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{3}{s+4}+\frac{2}{s+6}\quad \bullet\!\!-\!\!\circ\quad y(t)=1-3\cdot e^{-4t}+2\cdot e^{-6t}$

c) $L\{\ddot{y}+10\dot{y}+25y\}=L\{25\};\quad s^2\cdot Y(s)-s\cdot\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{0}+10\cdot(s\cdot Y(s)-\underbrace{y(0)}_{0})+25\cdot Y(s)=\frac{25}{s};$

$Y(s)=\frac{25}{s\cdot(s^2+10s+25)}$; $s^2+10s+25=0 \Rightarrow s_1=s_2=-5$; $s^2+10s+25=(s+5)^2$;

$\frac{25}{s\cdot(s+5)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+5}+\frac{C}{(s+5)^2} \Rightarrow A=1;\; B=-1;\; C=-5;$

$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+5}-\frac{5}{(s+5)^2}\quad \bullet\!\!-\!\!\circ\quad y(t)=1-e^{-5t}-5t\cdot e^{-5t}=1-(5t+1)\cdot e^{-5t}$

5.39 **d)** $L\{\ddot{y}+4\dot{y}+13y\}=L\{507\cdot(1+t)\}$; $s^2\cdot Y(s)+10\cdot s\cdot Y(s)+13\cdot Y(s)=507\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)$;

$Y(s)=\frac{507\cdot(s+1)}{s^2\cdot(s^2+4s+13)}$; $s^2+4s+13=0 \Rightarrow s_1=-2+3j$; $s_2=-2-3j$; keine reellen Lösungen;

$s^2+4s+13 = s^2+4s+4-4+13 = (s+2)^2+3^2$;

$\frac{507\cdot(s+1)}{s^2\cdot(s^2+4s+13)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C\cdot s+D}{s^2+4s+13} \Rightarrow A=27;\ B=39;\ C=-27;\ D=-147;$

$Y(s)=\frac{27}{s}+\frac{39}{s^2}-\frac{27s}{(s+2)^2+3^2}-\frac{147}{(s+2)^2+3^2}$

$\bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=27+39\cdot t-27\cdot e^{-2t}\left[\cos(3t)-\frac{2}{3}\cdot\sin(3t)\right]-147\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-2t}\cdot\sin(3t)=$

$=3\cdot(9+13\cdot t)-e^{-2t}\cdot[31\cdot\sin(3t)+27\cdot\cos(3t)] = 3\cdot(9+13\cdot t)-13\cdot\sqrt{10}\cdot\sin(3t+41{,}1°)$

e) $L\{\ddot{y}+14\dot{y}+49y\}=L\{686\cdot(1+2t)\}$; $s^2\cdot Y(s)+14\cdot s\cdot Y(s)+49\cdot Y(s)=686\cdot\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}\right)$;

$Y(s)=\frac{686\cdot(s+2)}{s^2\cdot(s^2+14s+49)}$; $s^2+14s+49=0 \Rightarrow s_1=s_2=-7$; $s^2+14s+49=(s+7)^2$;

$\frac{686\cdot(s+2)}{s^2\cdot(s+7)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+7}+\frac{D}{(s+7)^2} \Rightarrow A=6;\ B=28;\ C=-6;\ D=-70;$

$Y(s)=\frac{6}{s}+\frac{28}{s^2}-\frac{6}{s+7}-\frac{70}{(s+7)^2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=6+28t-6\cdot e^{-7t}-70\cdot e^{-7t}\cdot t=6+28t-(6+70t)\cdot e^{-7t}$

f) $L\{\ddot{y}+8\dot{y}+16y\}=L\{32t\}$; $s^2\cdot Y(s)+8\cdot s\cdot Y(s)+16\cdot Y(s)=\frac{32}{s^2}$;

$Y(s)=\frac{32}{s^2\cdot(s^2+8s+16)}$; $s^2+8s+16=0 \Rightarrow s_1=s_2=-4$; $s^2+8s+16=(s+4)^2$;

$\frac{32}{s^2\cdot(s+4)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+4}+\frac{D}{(s+4)^2} \Rightarrow A=-1;\ B=2;\ C=1;\ D=2;$

$Y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s+4}+\frac{2}{(s+4)^2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=-1+2t+e^{-4t}+2t\cdot e^{-4t}=2t-1+(2t+1)\cdot e^{-4t}$

g) $L\{\ddot{y}+16y\}=L\{28\cdot\sin(3t)\}$; $s^2\cdot Y(s)+16\cdot Y(s)=28\cdot\frac{3}{s^2+3^2}$;

$Y(s)=\frac{84}{(s^2+9)\cdot(s^2+16)}=\frac{A\cdot s+B}{s^2+9}+\frac{C\cdot s+D}{s^2+16} \Rightarrow A=0;\ B=12;\ C=0;\ D=-12;$

$Y(s)=\frac{12}{s^2+9}-\frac{12}{s^2+16}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=4\cdot\sin(3t)-3\cdot\sin(4t)$

h) $L\{\ddot{y}+16y\}=L\{32\cdot\sin(4t)\}$; $s^2\cdot Y(s)+16\cdot Y(s)=32\cdot\frac{4}{s^2+4^2}$;

$Y(s)=\frac{128}{(s^2+4^2)^2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=\frac{128}{2\cdot4^2}\left[\frac{1}{4}\cdot\sin(4t)-t\cdot\cos(4t\right] = \sin(4t)-4\cdot t\cdot\cos(4t)$

i) $L\{\ddot{y}+8\dot{y}+16y\}=L\{32\cdot\sin(4t)\}$; $s^2\cdot Y(s)+8\cdot s\cdot Y(s)+16\cdot Y(s)=32\cdot\frac{4}{s^2+4^2}$;

$Y(s)=\frac{128}{(s^2+16)\cdot(s^2+8s+16)}$; $s^2+8s+16=0 \Rightarrow s_1=s_2=-4$; $s^2+8s+16=(s+4)^2$;

$\frac{128}{(s^2+4^2)\cdot(s+4)^2}=\frac{A\cdot s+B}{s^2+4^2}+\frac{C}{s+4}+\frac{D}{(s+4)^2} \Rightarrow A=-1;\ B=0;\ C=1;\ D=4;$

$Y(s)=-\frac{s}{s^2+4^2}+\frac{1}{s+4}+\frac{4}{(s+4)^2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=-\cos(4t)+e^{-4t}+4\cdot t\cdot e^{-4t}=(4t+1)\cdot e^{-4t}-\cos(4t)$

5.40 **a)** $L\{\ddot{y}+4\dot{y}+29y\}=L\{680\cdot\sin(3t)\}$; $s^2\cdot Y(s)+4\cdot s\cdot Y(s)+29\cdot Y(s)=680\cdot\frac{3}{s^2+3^2}$;

$Y(s)=\frac{2040}{(s^2+9)\cdot(s^2+4s+29)}$; $s^2+4s+29=0 \Rightarrow s_1=-2+5j$; $s_2=-2-5j$; keine reellen Lös.;

$s^2+4s+29=s^2+4s+4-4+29=(s+2)^2+5^2$;

$\frac{2040}{(s^2+9)\cdot(s^2+4s+29)}=\frac{A\cdot s+B}{s^2+9}+\frac{C\cdot s+D}{s^2+4s+29} \Rightarrow A=-15;\ B=75;\ C=15;\ D=-15;$

$Y(s)=-15\cdot\frac{s}{s^2+9}+75\cdot\frac{1}{s^2+9}+15\cdot\frac{s}{(s+2)^2+5^2}-15\cdot\frac{1}{(s+2)^2+5^2}$;

$\bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=-15\cdot\cos(3t)+75\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin(3t)+15\cdot e^{-2t}\cdot\left[\cos(5t)-\frac{2}{5}\cdot\sin(5t)\right]-15\cdot\frac{1}{5}\cdot e^{-2t}\cdot\sin(5t)=$

$=25\cdot\sin(3t)-15\cdot\cos(3t)+e^{-2t}\cdot[-9\cdot\sin(5t)+15\cdot\cos(5t)]$;

stationäre Lösung: $y(t)=25\cdot\sin(3t)-15\cdot\cos(3t)=5\cdot\sqrt{34}\cdot\sin(3t-31{,}0°)$

b) $L\{\ddot{y}+6\dot{y}+10y\}=L\{30\cdot\cos(2t)\}$; $s^2\cdot Y(s)+6\cdot s\cdot Y(s)+10\cdot Y(s)=30\cdot\frac{s}{s^2+2^2}$;

$Y(s)=\frac{30s}{(s^2+4)\cdot(s^2+6s+10)}$; $s^2+6s+10=0 \Rightarrow s_1=-3+j$; $s_2=-3-j$; keine reellen Lösungen;

$s^2+6s+10=s^2+4s+9-9+10=(s+3)^2+1^2$;

$\frac{30s}{(s^2+4)\cdot(s^2+6s+10)}=\frac{A\cdot s+B}{s^2+4}+\frac{C\cdot s+D}{s^2+6s+10} \Rightarrow A=1;\ B=4;\ C=-1;\ D=-10;$

$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{s^2+4}-\frac{s}{(s+3)^2+1^2}-\frac{10}{(s+3)^2+1^2}$

$\bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=\cos(2t)+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2t)-e^{-3t}\cdot[\cos t-3\cdot\sin t]-10\cdot e^{-3t}\cdot\sin t=$

$=2\cdot\sin(2t)+\cos(2t)-e^{-3t}\cdot[7\cdot\sin t+\cos t]$;

stationäre Lösung: $y(t)=2\cdot\sin(2t)+\cos(2t)=\sqrt{5}\cdot\sin(2t+26{,}6°)$

c) $L\{\ddot{y}+2\dot{y}+10y\}=L\{195\cdot\sin(5t)\}$; $s^2\cdot Y(s)+2\cdot s\cdot Y(s)+10\cdot Y(s)=195\cdot\frac{5}{s^2+5^2}$;

$Y(s)=\frac{975}{(s^2+25)\cdot(s^2+2s+10)}$; $s^2+2s+10=0 \Rightarrow s_1=-1+3j$; $s_2=-1-3j$; keine reellen Lös.;

$s^2+2s+10=s^2+2s+1-1+10=(s+1)^2+3^2$;

$\frac{975}{(s^2+25)\cdot(s^2+2s+10)}=\frac{A\cdot s+B}{s^2+25}+\frac{C\cdot s+D}{s^2+2s+10} \Rightarrow A=-6;\ B=-45;\ C=6;\ D=57;$

$Y(s)=-6\cdot\frac{s}{s^2+5^2}-45\cdot\frac{1}{s^2+5^2}+6\cdot\frac{s}{(s+1)^2+3^2}+57\cdot\frac{1}{(s+1)^2+3^2}$;

$\bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=-6\cdot\cos(5t)-45\cdot\frac{1}{5}\cdot\sin(5t)+6\cdot e^{-t}\cdot\left[\cos(3t)-\frac{1}{3}\cdot\sin(3t)\right]+57\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-t}\cdot\sin(3t)=$

$=-9\cdot\sin(5t)-6\cdot\cos(5t)+e^{-t}\cdot[17\cdot\sin(3t)+6\cdot\cos(3t)]$;

stationäre Lösung: $y(t)=-9\cdot\sin(5t)-6\cdot\cos(5t)=3\cdot\sqrt{13}\cdot\sin(5t-146{,}3°)$

5.40 **d)** $L\{\ddot{y}+6\dot{y}+10y\}=L\{30\cdot[3\cdot\sin(2t)+4\cdot\cos(2t)]\}$;

$$s^2\cdot Y(s)+6s\cdot Y(s)+10\cdot Y(s)=30\cdot\left(\frac{6}{s^2+2^2}+\frac{4s}{s^2+2^2}\right);$$

$Y(s)=\dfrac{120s+180}{(s^2+4)\cdot(s^2+6s+10)}$; $s^2+6s+10=0 \Rightarrow s_1=-3+j$; $s_2=-3-j$; keine reellen Lösungen;

$s^2+6s+10=s^2+4s+9-9+10=(s+3)^2+1^2$;

$$\frac{120s+180}{(s^2+4)\cdot(s^2+6s+10)}=\frac{A\cdot s+B}{s^2+4}+\frac{C\cdot s+D}{s^2+6s+10} \Rightarrow A=-2;\ B=22;\ C=2;\ D=-10;$$

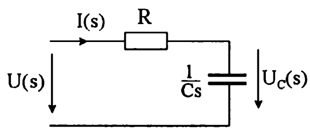
$$Y(s)=-\frac{2s}{s^2+2^2}+\frac{22}{s^2+2^2}+\frac{2s}{(s+3)^2+1^2}-\frac{10}{(s+3)^2+1^2}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t)=-2\cdot\cos(2t)+22\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2t)+2e^{-3t}\cdot[\cos t-3\cdot\sin t]-10\cdot e^{-3t}\cdot\sin t=$$

$$=11\cdot\sin(2t)-2\cos(2t)+e^{-3t}\cdot[-16\cdot\sin t+2\cos t];$$

stationäre Lösung: $y(t)=11\cdot\sin(2t)-2\cos(2t)=5\sqrt{5}\cdot\sin(2t-10{,}3°)$

5.41 $I(s)=\dfrac{U(s)}{Z(s)}=\dfrac{U(s)}{R+1/Cs}=\dfrac{Cs}{1+RCs}\cdot U(s)$;



$$U_C(s)=Z_C(s)\cdot I(s)=\frac{1}{Cs}\cdot\frac{Cs}{1+RCs}\cdot U(s)=\frac{1}{1+RCs}\cdot U(s);$$

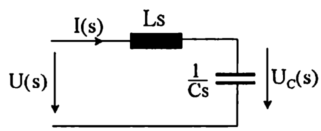
$u(t)=26\cdot\sin(3t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ U(s)=26\cdot\dfrac{3}{s^2+3^3}$;

$$U_C(s)=\frac{1}{1+10000\cdot 50\cdot 10^{-6}s}\cdot\frac{78}{s^2+3^2}=\frac{156}{(s+2)\cdot(s^2+3^2)};$$

$$\frac{156}{(s+2)\cdot(s^2+3^2)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+9} \Rightarrow A=12;\ B=-12;\ C=24;\ U_C(s)=\frac{12}{s+2}-\frac{12s}{s^2+3^2}+\frac{24}{s^2+3^2}$$

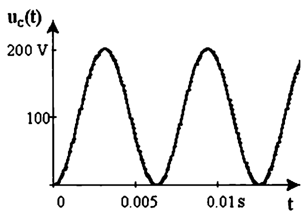
$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ u_C(t)=12\cdot e^{-2t}+8\cdot\sin(3t)-12\cdot\cos(3t)=12\cdot e^{-2t}+4\sqrt{13}\cdot\sin(3t-56{,}3°)\ \text{ in Volt}$$

5.42 $Z(s)=Ls+\dfrac{1}{Cs}$; $I(s)=\dfrac{U(s)}{Z(s)}=\dfrac{100/s}{1\cdot s+1000000/s}=\dfrac{100}{s^2+1000^2}$;



$I(s)\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ i(t)=100\cdot\dfrac{1}{1000}\cdot\sin(1000t)=0{,}1\cdot\sin(1000t)$ in Ampere;

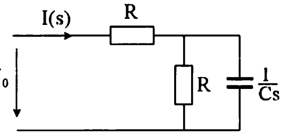
$$U_C(s)=Z_C\cdot I(s)=\frac{1}{Cs}\cdot I(s)=\frac{10^8}{s\cdot(s^2+1000^2)};$$

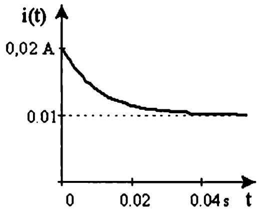


$$\frac{10^8}{s\cdot(s^2+1000^2)}=\frac{A}{s}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+10^6} \Rightarrow A=100;\ B=-100;\ C=0;$$

$U_C(s)=\dfrac{100}{s}-\dfrac{100s}{s^2+10^6}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ u_C(t)=100\cdot[1-\cos(1000t)]$ in Volt

5.43 $Z(s) = R + \dfrac{R \cdot 1/Cs}{R + 1/Cs} = \dfrac{400 \cdot (s+100)}{s+50}$;





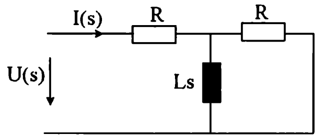
$I(s) = \dfrac{U(s)}{Z(s)} = \dfrac{U_0}{s} \cdot \dfrac{1}{Z(s)} = \dfrac{8}{s} \cdot \dfrac{s+50}{400 \cdot (s+100)}$;

$\dfrac{8 \cdot (s+50)}{s \cdot (s+100)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+100} \quad \Rightarrow \quad A = 4;\ B = 4;$

$I(s) = \dfrac{1}{400} \cdot \left(\dfrac{4}{s} + \dfrac{B}{s+100} \right) = \dfrac{1}{100 \cdot s} + \dfrac{1}{100 \cdot (s+100)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i(t) = 0{,}01 \cdot A \cdot (1 + e^{-100t})$

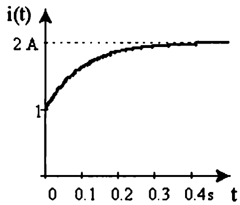
i(t) nähert sich mit zunehmender Zeit dem Wert $U_0/(2R) = 0{,}01$ A.

5.44 $Z(s) = R + \dfrac{R \cdot Ls}{R + Ls} = \dfrac{20 \cdot (s+10)}{s+20}$;



$I(s) = \dfrac{U(s)}{Z(s)} = \dfrac{U_0}{s} \cdot \dfrac{1}{Z(s)} = \dfrac{20}{s} \cdot \dfrac{s+20}{20 \cdot (s+10)} = \dfrac{s+20}{s \cdot (s+10)}$;

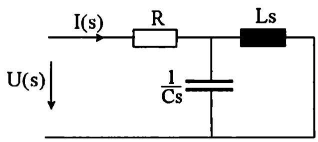
$\dfrac{s+20}{s \cdot (s+10)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+10}$; $A = 2$; $B = -1$;



$I(s) = \dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{s+10} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i(t) = 2 \cdot (1 - 0{,}5 \cdot e^{-10t})$ in Ampere;

mit zunehmender Zeit nähert sich i(t) dem Wert $\dfrac{U_0}{R} = 2$ A, der Strom durch den parallel zur Spule liegenden Widerstand geht gegen null.

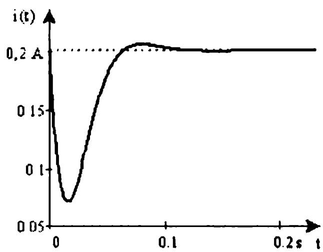
5.45 $U_0 = 20$ V; $R = 100\ \Omega$; $L = 2$H; $C = 100\ \mu$F;



$Z(s) = R + \dfrac{(1/Cs) \cdot Ls}{1/Cs + Ls} = R + \dfrac{Ls}{1 + CL \cdot s^2} = \dfrac{100 \cdot (s^2 + 100s + 5000)}{s^2 + 5000}$;

$I(s) = \dfrac{U(s)}{Z(s)} = \dfrac{U_0}{s} \cdot \dfrac{1}{Z(s)} = \dfrac{20}{s} \cdot \dfrac{s^2 + 5000}{100 \cdot (s^2 + 100s + 5000)}$;

$s^2 + 100s + 5000 = 0 \Rightarrow s_1 = -50 + 50j$; $s_2 = -50 - 50j$; keine reellen Lösungen.



$\dfrac{s^2 + 5000}{s \cdot (s^2 + 100s + 5000)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B \cdot s + C}{s^2 + 100s + 5000} \Rightarrow A = 1;\ B = 0;\ C = -100;$

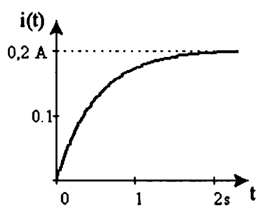
$s^2 + 50s + 5000 = (s + 50)^2 + 50^2$;

$I(s) = \dfrac{1}{5} \cdot \left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{100}{s^2 + 100s + 5000} \right) = \dfrac{1}{5} \cdot \left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{100}{(s+50)^2 + 2500} \right)$;

$I(s) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i(t) = \dfrac{1}{5} \cdot \left[1 - 2 \cdot e^{-50t} \cdot \sin(50t) \right]$ in Ampere.

Der Strom fließt mit zunehmender Zeit praktisch nur noch durch den Ohmschen Widerstand und die Spule, die keinen Ohmschen Widerstand besitzt. Daher nähert sich i(t) dem Wert $\dfrac{U_0}{R} = 0{,}2\ \Omega$.

5.46 $Z(s) = R + 1/Cs$; $U(s) = \dfrac{4}{s^2}$; $I(s) = \dfrac{U(s)}{Z(s)} = \dfrac{4/s^2}{R + 1/Cs} = \dfrac{1}{2500 \cdot s \cdot (s+2)}$;



$\dfrac{1}{s \cdot (s+2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} \quad \Rightarrow A = \dfrac{1}{2};\ B = -\dfrac{1}{2};$

$I(s) = \dfrac{1}{5000} \cdot \left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+2} \right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i(t) = 0{,}2\ mA \cdot (1 - e^{-2t})$; der Kondensator begrenzt trotz steigender Spannung die Stromstärke mit 0,2 A.

$u_R(t) = R \cdot i(t) = 2 \cdot (1 - e^{-2t})$

5.47 $I(s)=\dfrac{U(s)}{Z(s)}=\dfrac{U(s)}{R+1/Cs}=\dfrac{Cs}{1+RCs}\cdot U(s)=\dfrac{s}{10000\cdot(s+2)}\cdot U(s);\quad u(t)=\begin{cases}40t & \text{für} \quad 0\le t<1/4\,s\\ 20-40t & \text{für} \quad 1/4\,s\le t<1/2\,s\\ 0 & \text{für} \quad t\ge 1/2\,s\end{cases}$

$$U(s)=\int_0^{1/4}40t\cdot e^{-s\cdot t}\,dt+\int_{1/4}^{1/2}(20-40t)\cdot e^{-s\cdot t}\,dt=\frac{40}{s^2}\cdot\left(1-2\cdot e^{-s/4}+e^{-s/2}\right);$$

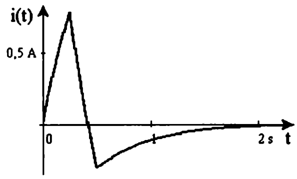
$$I(s)=\frac{1}{250\cdot s\cdot(s+2)}\cdot\left(1-2\cdot e^{-s/4}+e^{-s/2}\right)=\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\cdot\left(1-2\cdot e^{-s/4}+e^{-s/2}\right);$$

$$I(s)=\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\cdot 1+\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\cdot\left(-2\cdot e^{-s/4}\right)+\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\cdot e^{-s/2};$$

$$\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\cdot 1 \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i_1(t)=2\text{ mA}\cdot\left(1-e^{-2t}\right);$$

$$\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\cdot\left(-2\cdot e^{-s/4}\right) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i_2(t)=2\text{ mA}\cdot\left(-2+2\cdot e^{-2\cdot(t-1/4)}\right)\cdot\sigma(t-1/4);$$

$$\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\cdot e^{-s/2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i_3(t)=2\text{ mA}\cdot\left(1-e^{-2\cdot(t-1/2)}\right)\cdot\sigma(t-1/2).$$



Der Teilstrom $i_2(t)$ setzt erst ab t = 0,25 s, der Teilstrom $i_3(t)$ ab t = 0,5 s ein.

$$i(t)=i_1+i_2+i_3=\begin{cases}2\text{ mA}\cdot\left(1-e^{-2\cdot t}\right) & \text{für} \quad 0\le t<1/4\,s\\ 2\text{ mA}\cdot\left(-1-e^{-2\cdot t}+2\cdot e^{-2\cdot(t-1/4)}\right) & \text{für} \quad 1/4\,s\le t<1/2\,s\\ 2\text{ mA}\cdot\left(-e^{-2\cdot t}+2\cdot e^{-2\cdot(t-1/4)}-e^{-2\cdot(t-1/2)}\right) & \text{für} \quad t\ge 1/2\,s\end{cases}$$

5.48 $I(s)=\dfrac{U(s)}{Z(s)}=\dfrac{U_0/s}{R+Ls+1/Cs}=\dfrac{10}{s^2+200s+20000};$

$s^2+200s+20000=0 \Rightarrow s_1=-100+100j;\ s_2=-100-100j;$ keine reellen Lösungen;
$s^2+200s+20000=s^2+200s+100^2-100^2+20000=(s+100)^2+100^2;$

$$I(s)=\frac{10}{(s+100)^2+100^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i(t)=0,1\text{ A}\cdot e^{-100\cdot t}\cdot\sin(100t).$$

5.49 $I(s)=\dfrac{U(s)}{Z(s)}=\dfrac{U_0/s}{R+Ls+1/Cs}=\dfrac{30}{s^2+2500\,s+1\,000\,000};$

$s^2+2500s+1000000=0 \Rightarrow s_1=-500;\ s_2=-2000;\ s^2+2500s+1000000=(s+500)\cdot(s+2000);$

$$\frac{30}{s^2+2500\,s+1\,000\,000}=\frac{A}{s+500}+\frac{B}{s+2000} \Rightarrow A=\frac{1}{50};\ B=-\frac{1}{50};$$

$$I(s)=\frac{1}{50\cdot(s+500)}-\frac{1}{50\cdot(s+2000)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad i(t)=20\text{ mA}\cdot\left(e^{-500\cdot t}-e^{-2000\cdot t}\right);$$

Ermittlung von $u_C(t)$: $U_C(s)=Z_C(s)\cdot I(s)=\dfrac{1}{Cs}\cdot I(s)=\dfrac{3\cdot 10^7}{s\cdot(s^2+2500\,s+1000000)};$

$$\frac{3\cdot 10^7}{s\cdot(s^2+2500\,s+1000000)}=\frac{3\cdot 10^7}{s\cdot(s+500)\cdot(s+2000)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+500}+\frac{C}{s+2000} \Rightarrow A=30;\ B=-40;\ C=10;$$

$$U_C(s)=\frac{30}{s}-\frac{40}{s+500}+\frac{10}{s+2000} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad u_C(t)=30-40\cdot e^{-500t}+10\cdot e^{-2000t} \text{ in Volt.}$$

Alternative Ermittlung von $u_C(t)$: $q(t)=C\cdot u_C(t);\ i(t)=\dot q=C\cdot\dot u_C \Rightarrow$

$u_C=\int\frac{1}{C}\cdot i(t)\,dt=10^6\cdot 0{,}02\cdot\left(-\frac{1}{500}\cdot e^{-500t}+\frac{1}{2000}\cdot e^{-2000t}\right)+K=10\cdot e^{-2000\cdot t}-40\cdot e^{-500\cdot t}+K$. Die Integrationskonstante K ergibt sich aus $u_C(0)=0$: $u_C(0)=10\cdot 1-40\cdot 1+K=0 \Rightarrow K=30$.
Damit: $u_C(t)=30+10\cdot e^{-2000\cdot t}-40\cdot e^{-500\cdot t}$ in Volt.

5.50 $Z(s)=\dfrac{R\cdot 1/Cs}{R+1/Cs}+R=\dfrac{10000\cdot(s+4)}{s+2}$; $u(t)=\begin{cases}200\cdot t & \text{für } 0\le t<0{,}5\text{ s}\\ 100 & \text{für } t\ge 0{,}5\text{ s}\end{cases}$

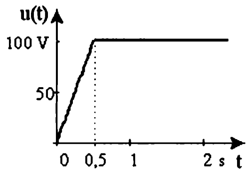
$$U(s)=\int_0^{1/2}200t\cdot e^{-s\cdot t}\,dt+\int_{1/2}^{\infty}100\cdot e^{-s\cdot t}\,dt=\frac{200}{s^2}\cdot\left(1-e^{-s/2}\right);\ I(s)=\frac{U(s)}{Z(s)}=\frac{s+2}{50\cdot s^2(s+4)}\cdot\left(1-e^{-s/2}\right);$$

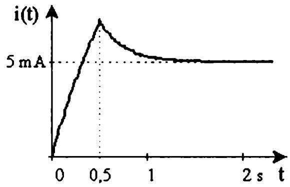
$$\frac{s+2}{50\cdot s^2(s+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+4}\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{400};\ B=\frac{1}{100};\ C=-\frac{1}{400};$$

$$I(s)=\left(\frac{1}{100\cdot s^2}+\frac{1}{400\cdot s}-\frac{1}{400\cdot(s+4)}\right)\cdot\left(1-e^{-s/2}\right)=(\ \ldots\ )\cdot 1+(\ \ldots\ )\cdot\left(-e^{-s/2}\right)$$

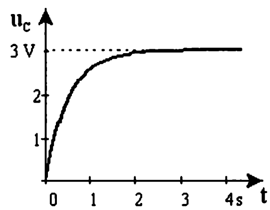
$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ i(t)=\frac{1}{400}\cdot\left(4t+1-e^{-4t}\right)-\frac{1}{400}\cdot\left[4(t-1/2)+1-e^{-4\cdot(t-1/2)}\right]\cdot\sigma(t-1/2)\quad \text{oder:}$$

$$i(t)=\begin{cases}2{,}5\text{ mA}\cdot\left(4t+1-e^{-4t}\right) & \text{für } 0\le t<0{,}5\text{ s}\\ 2{,}5\text{ mA}\cdot\left(2-e^{-4t}+e^{2-4t}\right) & \text{für } t\ge 0{,}5\text{ s}\end{cases}$$





5.51 **a)** Ist I(s) die Bildfunktion der Stromstärke i(t) im Netzwerk, so gilt:



$$U(s)=\frac{3}{s};\quad U(s)=Z(s)\cdot I(s)=\left(R+\frac{1}{Cs}\right)\cdot I(s);$$

$$U_C(s)=Z_C(s)\cdot I(s)=\frac{1}{Cs}\cdot I(s);\quad G(s)=\frac{U_C(s)}{U(s)}=\frac{1}{1+RCs}=\frac{2}{s+2};$$

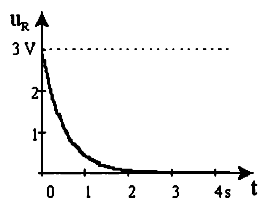
$$U_C(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{6}{s\cdot(s+2)};\quad \frac{6}{s\cdot(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}\ \Rightarrow\ A=3;\ B=-3;$$

$$U_C(s)=\frac{3}{s}-\frac{3}{s+2}\quad \bullet\!\!-\!\!\circ\quad u_C(t)=3\text{ V}\cdot\left(1-e^{-2\cdot t}\right).$$

Die Übertragungsfunktion G(s) kann, was auch für die folgenden Aufgaben gilt, unmittelbar über die *Spannungsteilerregel* erhalten werden:
Werden Widerstände vom gleichen Strom durchflossen, so verhalten sich die Spannungen an den Widerständen wie die Widerstände.

$$G(s)=\frac{U_C(s)}{U(s)}=\frac{Z_C(s)}{Z(s)}=\frac{1/Cs}{R+1/Cs}=\frac{1}{1+RCs}.$$

b) $U(s)=\dfrac{3}{s}$; $U(s)=Z(s)\cdot I(s)=\left(R+\dfrac{1}{Cs}\right)\cdot I(s)$;



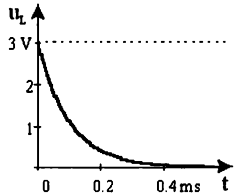
$$U_R(s)=Z_R(s)\cdot I(s)=R\cdot I(s);\quad G(s)=\frac{U_R(s)}{U(s)}=\frac{RCs}{1+RCs}=\frac{s}{s+2};$$

$$U_R(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{s}{s+2}\cdot\frac{3}{s}=\frac{3}{s+2}\quad \bullet\!\!-\!\!\circ\quad u_R(t)=3\text{ V}\cdot e^{-2\cdot t}$$

5.51 **c)** $U(s)=\frac{3}{s}$; $U(s)=Z(s)\cdot I(s)=(R+Ls)\cdot I(s)$;

$U_L(s)=Z_L(s)\cdot I(s)=Ls\cdot I(s)$; $G(s)=\frac{U_L(s)}{U(s)}=\frac{Ls}{R+Ls}=\frac{s}{s+10^4}$;

$U_L(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{s}{s+10^4}\cdot\frac{3}{s}=\frac{3}{s+10^4}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $u_L(t)=3\text{ V}\cdot e^{-10000\cdot t}$

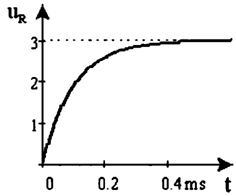


d) $U(s)=\frac{3}{s}$; $U(s)=Z(s)\cdot I(s)=(R+Ls)\cdot I(s)$;

$U_R(s)=Z_R(s)\cdot I(s)=R\cdot I(s)$; $G(s)=\frac{U_R(s)}{U(s)}=\frac{R}{R+Ls}=\frac{10^4}{s+10^4}$;

$U_R(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{10^4}{s+10^4}\cdot\frac{3}{s}$; $\frac{3\cdot10^4}{s\cdot(s+10^4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+10^4}$

$\Rightarrow A=3;\ B=-3;\ U_R(s)=\frac{3}{s}-\frac{3}{s+10^4}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $u_R(t)=3\text{ V}\cdot\left(1-e^{-10000\cdot t}\right)$



5.52 **a)** Ist $I(s)$ die Bildfunktion der Stromstärke $i(t)$ im Netzwerk, so gilt:

$U(s)=Z(s)\cdot I(s)=\left(\frac{1}{Cs}+R+Ls\right)\cdot I(s)$; $U_L(s)=Z_L(s)\cdot I(s)=Ls\cdot I(s)$;

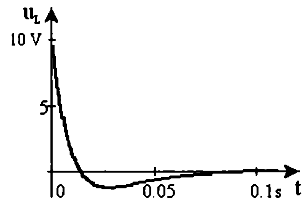
$G(s)=\frac{U_L(s)}{U(s)}=\frac{CLs^2}{CLs^2+RCs+1}=\frac{s^2}{s^2+150s+5000}$ (auch mit Hilfe der Spannungsteilerregel);

$s^2+150s+5000=0 \Rightarrow s_1=-50;\ s_2=-100;\ s^2+150s+5000=(s+50)\cdot(s+100)$

b) $U(s)=\frac{10}{s}$; $U_L(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{s^2}{(s+50)\cdot(s+100)}\cdot\frac{10}{s}$;

$\frac{10s}{(s+50)\cdot(s+100)}=\frac{A}{s+50}+\frac{B}{s+100} \Rightarrow A=-10;\ B=20$;

$U_L(s)=\frac{20}{s+100}-\frac{10}{s+50}$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ $u_L(t)=20\text{ V}\cdot\left(e^{-100\cdot t}-0{,}5\cdot e^{-50\cdot t}\right)$



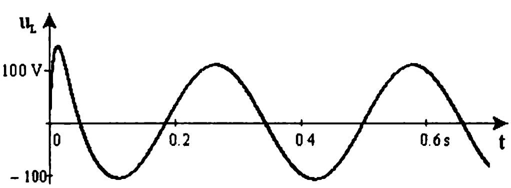
c) $U(s)=1508\cdot\frac{20}{s^2+400}$; $U_L(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{1508\cdot 20\cdot s^2}{(s+50)\cdot(s+100)\cdot(s^2+400)}$;

$\frac{1508\cdot 20\cdot s^2}{(s+50)\cdot(s+100)\cdot(s^2+400)}=\frac{A}{s+50}+\frac{B}{s+100}+\frac{C\cdot s+D}{s^2+400} \Rightarrow A=520;\ B=-580;\ C=60;\ D=-1840$;

$U_L(s)=\frac{520}{s+50}-\frac{580}{s+100}+\frac{60s-1840}{s^2+400}=\frac{520}{s+50}-\frac{580}{s+100}+60\cdot\frac{s}{s^2+400}-92\cdot\frac{20}{s^2+400}$

$\bullet\!\!-\!\!\circ$ $u_L(t)=520\cdot e^{-50\cdot t}-580\cdot e^{-100\cdot t}-92\cdot\sin 20t+60\cos 20t=$

$=520\cdot e^{-50\cdot t}-580\cdot e^{-100\cdot t}+109{,}8\cdot\sin(20t+146{,}9°)$ in Volt



6 Grundlagen der statistischen Methoden

6.1 Die Anzahl der fehlerhaften Einheiten in einer (Zufalls–)Stichprobe ist hypergeometrisch verteilt mit $N = 20$, $d = 3$, $n = 5$; $\mu = n \cdot \frac{d}{N} = \frac{3}{4}$;

$$g(0) = \frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{1\cdot\frac{17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}} = \frac{17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16} = \frac{15\cdot14\cdot13}{20\cdot19\cdot18} = 0{,}3991\,;$$

$$g(1) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{17}{4}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{3}{1}\cdot\frac{17\cdot16\cdot15\cdot14}{1\cdot2\cdot3\cdot4}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}} = \frac{3\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5}} = \frac{3\cdot5\cdot15\cdot14}{20\cdot19\cdot18} = 0{,}4605\,;$$

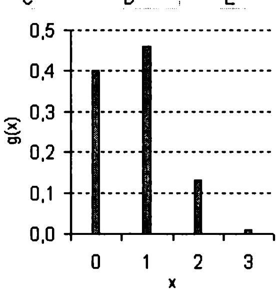
$$g(2) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{17}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\cdot\frac{17\cdot16\cdot15}{1\cdot2\cdot3}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}} = \frac{3\cdot17\cdot16\cdot15}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{4\cdot5}} = \frac{3\cdot4\cdot5\cdot15}{20\cdot19\cdot18} = 0{,}1316\,;$$

$$g(3) = \frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{17}{2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{17\cdot16}{1\cdot2}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}} = \frac{1\cdot17\cdot16}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{3\cdot4\cdot5}} = \frac{3\cdot4\cdot5\cdot1}{20\cdot19\cdot18} = 0{,}0088\,;$$

Kontrolle: g(0) + g(19 + g(2) + g(3) = 1

B2 ▾ fx =HYPGEOMVERT(A2;5;3;20)

	A	B
1	x	g(x)
2	0	0,3991
3	1	0,4605
4	2	0,1316
5	3	0,0088

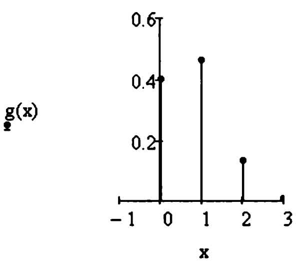


Mathcad

x := 0.. 3   d := 3   N := 20   n := 5

g(x) := dhypergeom(x, d, N − d, n)

x =	g(x) =
0	0.3991
1	0.4605
2	0.1316
3	0.0088



6.2 Die Anzahl der defekten Dichtungen unter drei entnommenen Dichtungen ist hypergeometrisch verteilt mit N = 25 + 4 = 29; d = 4 und n = 3.

a) $$g(0)=\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{25}{3}}{\binom{29}{3}}=\frac{1\cdot\frac{25\cdot24\cdot23}{1\cdot2\cdot3}}{\frac{29\cdot28\cdot27}{1\cdot2\cdot3}}=\frac{25\cdot24\cdot23}{29\cdot28\cdot27}=0{,}6294$$

b) $$G(1)=g(0)+g(1);\; g(1)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{25}{2}}{\binom{29}{3}}=\frac{\frac{4}{1}\cdot\frac{25\cdot24}{1\cdot2}}{\frac{29\cdot28\cdot27}{1\cdot2\cdot3}}=\frac{4\cdot25\cdot24}{\frac{29\cdot28\cdot27}{3}}=\frac{3\cdot4\cdot25\cdot24}{29\cdot28\cdot27}=0{,}3284;\; G(1)=0{,}9579$$

c) Mindestens eine = Nicht keine; $1-G(0)=1-g(0)=0{,}3706$

6.3 Die Anzahl der defekten Dichtungen unter drei entnommenen Dichtungen ist hypergeometrisch verteilt mit N = 29, d = 4, n = 3; $\mu=n\cdot\frac{d}{N}=\frac{12}{29}\approx0{,}41$

6.4 Die Anzahl der fehlerhaften Kondensatoren in einer Stichprobe des Umfangs 5 (= die entfernten 5 Kondensatoren) ist hypergeometrisch verteilt mit N = 20, d = 1, n = 5.

$$g(1)=\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{19}{4}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{1}{1}\cdot\frac{19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}}=\frac{1\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5}}=\frac{5\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Oder einfacher: Man unterteilt die Gesamtheit der Kondensatoren in vier gleich große Gruppen, wobei die 5 leicht zugänglichen Kondensatoren eine Gruppe bilden. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der fehlerhafte Kondensator in der genannten Gruppe befindet, ist gleich $\frac{1}{4}$.

6.5 Die Anzahl der unbrauchbaren Batterien in einer Stichprobe des Umfangs 4 (= die vom Batterietestgerät geprüften Batterien) ist hypergeometrisch verteilt mit N = 20; d = 2; n = 4;

$$g(2)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{18}{2}}{\binom{20}{4}}=\frac{\frac{2\cdot1}{1\cdot2}\cdot\frac{18\cdot17}{1\cdot2}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{1\cdot2\cdot3\cdot4}}=\frac{1\cdot18\cdot17}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{3\cdot4}}=\frac{3\cdot4\cdot\cdot1}{20\cdot19}=0{,}0316\approx3{,}2\%$$

6.6 Man müsste eine Stichprobe ziehen, welche die beiden fehlerhaften Schrauben enthält. Die Anzahl der fehlerhaften Schrauben in solchen Stichproben ist hypergeometrisch verteilt mit N = 18, d = 2, n = 8.

$$g(2)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{16}{6}}{\binom{18}{8}}=\frac{\frac{2\cdot1}{1\cdot2}\cdot\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}{\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}}=\frac{1\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{7\cdot8}}=\frac{7\cdot8\cdot\cdot1}{18\cdot17}=0{,}1830$$

6.7 Die Anzahl fehlerhafter Kugeln beim zufälligen Entnehmen von 10 Kugeln ist hypergeometrisch verteilt mit N = 50, d = 5 und n = 10. Fehleranteil im Behälter $\frac{d}{N}=\frac{1}{10}$; unter den entnommenen 10 Kugeln müssten sich $\frac{1}{10}\cdot10=1$ fehlerhafte Kugeln befinden.

$$g(1)=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{45}{9}}{\binom{50}{10}}=\frac{\frac{5}{1}\cdot\frac{45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41\cdot40\cdot39\cdot38\cdot37}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}}{\frac{50\cdot49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}}=\frac{5\cdot45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41\cdot}{\frac{50\cdot49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41}{10}}=\frac{5\cdot10\cdot40\cdot39\cdot38\cdot37}{50\cdot49\cdot48\cdot47\cdot46}=0{,}4313$$

6.8 Die Anzahl der Schrauben mit einem etwas zu kleinen Durchmesser unter 10 zufällig der Schachtel entnommenen Schrauben ist hypergeometrisch verteilt mit N = 15, d = 6, n = 10;
g(0) = 0, da nur 15 – 6 = 9 Schrauben einwandfrei sind, können nicht 10 einwandfreie gezogen werden.

Rechnerisch: $g(0) = \dfrac{\binom{6}{0}\cdot\binom{9}{10}}{\binom{15}{10}} = \dfrac{1\cdot\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot0}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}}{\dfrac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}} = 0$

6.9 Die Anzahl funktionsunfähiger Prüfgeräte unter 10 aus dem Los entnommenen Geräten ist hypergeometrisch verteilt mit N = 40; d = 3 und n = 10. Das Los wird angenommen, wenn sich darunter kein funktionsunfähiges Prüfgerät befindet..

$$g(0) = \frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{37}{10}}{\binom{40}{10}} = \frac{1\cdot\dfrac{37\cdot36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}}{\dfrac{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}} = \frac{30\cdot29\cdot28}{40\cdot39\cdot38} = 0{,}4109$$

6.10 Die Anzahl 6 richtiger Zahlen in einem Tipp von 6 Zahlen ist hypergeometrisch verteilt mit N = 45, d = 6, n = 6;

a) $g(6) = \dfrac{\binom{6}{6}\cdot\binom{39}{0}}{\binom{45}{6}} = \dfrac{1}{8145060} = 1{,}228\cdot10^{-7}$

b) Es gibt $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten, aus den 6 richtigen Zahlen Tipps von 5 richtigen zu bilden.

6 Tipps enthalten also 5 richtige Zahlen. Die Zusatzzahl kommt als sechste Zahl zu jedem dieser 6 Tipps. Damit ist die Anzahl der günstigen Fälle für das Ereignis „5 richtige Zahlen und die Zusatzzahl“: g = 6; Anzahl der möglichen Fälle: $m = \binom{45}{6}$;

somit: P(5 richtige *mit* Zusatzzahl) = $\dfrac{g}{m} = \dfrac{6}{\binom{45}{6}} = 7{,}366\cdot10^{-7}$.

c) Es gibt wieder $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten, aus den 6 richtigen Zahlen Tipps von 5 richtigen zu bilden. Als sechste Zahl zu einem solchen Tipp kommt eine Zahl dazu, die weder eine richtige Zahl noch die Zusatzzahl ist. Von solchen Zahlen gibt es 45 – 6 – 1 = 38. Somit ist die Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle $g = 6\cdot38 = 228$;

Anzahl der möglichen Fälle: $m = \binom{45}{6}$; P(5 richtige *ohne* Zusatzzahl) = $\dfrac{g}{m} = \dfrac{228}{\binom{45}{6}} = 2{,}800\cdot10^{-5}$

d) $g(3) = \dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{39}{3}}{\binom{45}{6}} = 0{,}00224$ **e)** $g(0) = \dfrac{\binom{6}{0}\cdot\binom{39}{6}}{\binom{45}{6}} = 0{,}4006$

6.11 Die Anzahl der Mädchen in einer Zufallsauswahl von 3 Schülern aus einer Schulklasse von 10 Burschen und 5 Mädchen ist hypergeometrisch verteilt mit N = 10 + 5 = 15, d = 5 und n = 3;

a) $g(0) = \dfrac{\binom{5}{0}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0{,}2637$ **b)** 1 – G(0) = 1 – g(0) = 0,7363

6.12 Die Anzahl der Mitarbeiter, die für die Einführung einer Kantine sind, ist hypergeometrisch verteilt mit N = 100, d = 60 und n = 20; $g(8)=\frac{\binom{60}{8}\cdot\binom{40}{12}}{\binom{100}{20}}=\frac{2558620845\cdot 5586853480}{535983370403809682970}=0{,}0267.$

D.h. Auch bei einer 60%-igen Zustimmung unter *allen* Mitarbeitern kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,67% vor, dass die Zustimmung unter den 20 ausgewählten Mitarbeitern nur $\frac{8}{20}=40\%$ beträgt.

6.13 Die Anzahl der sehr guten Tests ist binomialverteilt mit n = 20, p = 0,2;

$g(0)=\binom{8}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot(1-0{,}2)^8=0{,}1678$ $\quad g(1)=\binom{8}{1}\cdot 0{,}2^1\cdot(1-0{,}2)^7=0{,}3355$

$g(2)=\binom{8}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot(1-0{,}2)^6=0{,}2936$ $\quad g(3)=\binom{8}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot(1-0{,}2)^5=0{,}1468$

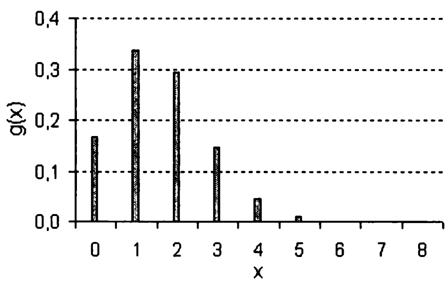
$g(4)=\binom{8}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot(1-0{,}2)^4=0{,}0459$ $\quad g(5)=\binom{8}{5}\cdot 0{,}2^5\cdot(1-0{,}2)^3=0{,}0092$

$g(6)=\binom{8}{6}\cdot 0{,}2^6\cdot(1-0{,}2)^2=0{,}0011$ $\quad g(7)=\binom{8}{7}\cdot 0{,}2^7\cdot(1-0{,}2)^1=0{,}0001$

$g(8)=\binom{8}{8}\cdot 0{,}2^8\cdot(1-0{,}2)^0=0{,}0000$

B2 ▾ fx =BINOMVERT(A2;8;0,2;0)

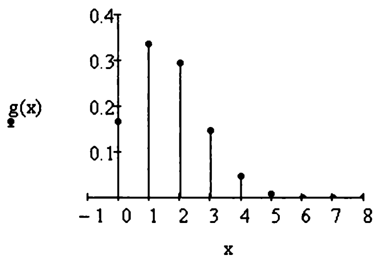
	A	B
1	x	g(x)
2	0	0,1678
3	1	0,3355
4	2	0,2936
5	3	0,1468
6	4	0,0459
7	5	0,0092
8	6	0,0011
9	7	0,0001
10	8	0,0000
11		
12		



Mathcad

$x := 0..8 \quad n := 8 \quad p := 0.2 \quad g(x) := \mathrm{dbinom}(x,n,p)$

x =	g(x) =
0	0.1678
1	0.3355
2	0.2936
3	0.1468
4	0.0459
5	0.0092
6	0.0011
7	0.0001
8	0.0000



6.14 Die Anzahl der Sechser ist binomialverteilt mit n = 10 und $p = \frac{1}{6}$.

a) $g(0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10} = 0{,}1615$ **b)** $g(1) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^9 = 0{,}3230$

c) G(1) = g(0) + g(1) = 0,4845 **d)** 1 – G(0) = 1 – g(0) = 0,8385

6.15 $\frac{1}{6}$ wie bei jedem Wurf, da die Würfe voneinander unabhängig sind

6.16 Die Anzahl fehlerhafter Einheiten ist binomialverteilt mit n = 80 und p = 3%.

a) $g(0) = \binom{80}{0} \cdot 0{,}03^0 \cdot (1 - 0{,}03)^{80} = 0{,}0874$ **b)** $g(1) = \binom{80}{1} \cdot 0{,}03^1 \cdot (1 - 0{,}03)^{79} = 0{,}2164$

c) G(3) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3); $g(2) = \binom{80}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot (1 - 0{,}03)^{78} = 0{,}2643$;

$g(3) = \binom{80}{3} \cdot 0{,}03^3 \cdot (1 - 0{,}03)^{77} = 0{,}2125$; G(3) = 0,7807

d) Mindestens drei = Nicht höchstens 2; 1 – G(2) = 1 - [g(0) + g(1) + g(2)] = 1 – 0,5681 = 0,4319

6.17 Die Anzahl der Ausschussstücke ist binomialverteilt mit n = 1000 und $p = \frac{1}{200} = 0{,}005 = 0{,}5\%$;

a) $g(0) = \binom{1000}{0} \cdot 0{,}005^0 \cdot (1 - 0{,}005)^{1000} = 0{,}0067$

b) G(1) = g(0) +g(1); $g(1) = \binom{1000}{1} \cdot 0{,}005^1 \cdot (1 - 0{,}005)^{999} = 0{,}0334$; G(1) = 0,0401

6.18 Die Anzahl der Schalter, die ausfallen, ist binomialverteilt mit n = 5 und p = 0,04;

a) $g(0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot (1 - 0{,}04)^5 = 0{,}8154$

b) g(3) + g(4) + g(5) = 1 – [g(0) + g(1) + g(2)] = 1 – G(2);

$g(1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot (1 - 0{,}04)^4 = 0{,}1699$; $g(2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}04^2 \cdot (1 - 0{,}04)^3 = 0{,}0142$;

1 – G(2) = 1 – 0,9994 = 0,0006

6.19 Die Anzahl der fehlerhaften Einheiten in einer Stichprobe ist hypergeometrisch verteilt mit N = 5000, d = 100 und n = 200; wegen n/N = 4% < 10% , ist diese Anzahl näherungsweise binomialverteilt mit n = 200 und p = d/N = 2%.

$g(0) = \binom{200}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot (1 - 0{,}02)^{200} = 0{,}0176$ $g(1) = \binom{200}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot (1 - 0{,}02)^{199} = 0{,}0718$;

$g(2) = \binom{200}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot (1 - 0{,}02)^{198} = 0{,}1458$; $g(3) = \binom{200}{3} \cdot 0{,}02^3 \cdot (1 - 0{,}02)^{197} = 0{,}1963$;

$g(4) = \binom{200}{4} \cdot 0{,}02^4 \cdot (1 - 0{,}02)^{196} = 0{,}1973$;

Im Folgenden in Klammern die genauen Werte bei Verwendung der hypergeom. Verteilung.

a) g(0) = 0,0176 (genau: 0,0162)

b) g(2) = 0,1458 (genau: 0,1442)

c) G(4) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) + g(4) = 0,6288 (genau: 0,6290)

d) 1 – G(1) = 1 – 0,0894 = 0,9106 (genau: 0,9150)

6.20 Die Anzahl der fehlerhaften Einheiten in einer Stichprobe ist hypergeometrisch verteilt mit $N = 3000$, d nach Angabe gleich $1\% \cdot 3000 = 30$, $2\% \cdot 3000 = 60$ bzw. $6\% \cdot 3000 = 180$ sowie $n = 125$; wegen $n/N \approx 4{,}2\% < 10\%$, ist diese Anzahl näherungsweise binomialverteilt mit $n = 125$ und $p = d/3000$.

a) $p = d/N = 1\%$;

$$g(0) = \binom{125}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot (1-0{,}01)^{125} = 0{,}2847; \qquad g(1) = \binom{125}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot (1-0{,}01)^{124} = 0{,}3595;$$

$$g(2) = \binom{125}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot (1-0{,}01)^{123} = 0{,}2251; \qquad g(3) = \binom{125}{3} \cdot 0{,}01^3 \cdot (1-0{,}01)^{122} = 0{,}0932;$$

$G(3) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 0{,}9626$

b) $p = d/N = 2\%$; $g(0) = \binom{125}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot (1-0{,}02)^{125} = 0{,}0800$; $g(1) = 0{,}2042$; $g(2) = 0{,}2583$;

$g(3) = 0{,}2162$; $G(3) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 0{,}7587$

c) C1 ▾ fx =BINOMVERT(3;125;0,06;1)

	A	B	C	D
1	p = 6%:	G(3) =	0,0539	

Mathcad

$G(x) := \mathrm{pbinom}(x, 125, 0.06)$

$G(3) = 0.0539$

6.21 Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}5$.
$g(8) + g(9) + g(10) = 1 - G(7)$;
Hier ist es günstiger, $g(8) + g(9) + g(10)$ zu berechnen.

$$g(8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}5^8 \cdot (1-0{,}5)^2 = \binom{10}{2} \cdot 0{,}5^{10} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}5^{10} = 0{,}0439;$$

$$g(9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}5^9 \cdot (1-0{,}5) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}5^{10} = \frac{10}{1} \cdot 0{,}5^{10} = 0{,}0098$$

$$g(10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}5^{10} \cdot (1-0{,}5)^0 = \binom{10}{0} \cdot 0{,}5^{10} = 1 \cdot 0{,}5^{10} = 0{,}0010$$

$g(8) + g(9) + g(10) = 0{,}0547 = 5{,}47\%$

6.22 Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist binomialverteilt mit $n = 30$ und $p = 0{,}25$.
$g(16) + g(17) + ... + g(30) = 1 - G(15)$.

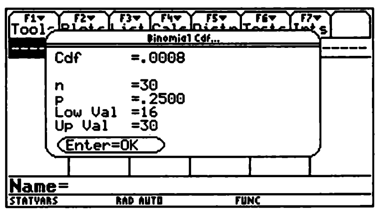
a) D1 ▾ fx =BINOMVERT(15;B1;B2;1)

	A	B	C	D	E
1	n =	30	G(15) =	0,9992	
2	p =	0,25	1-G(15) =	0,0008	

Mathcad

$n := 30 \quad p := 0.25$

$G(x) := \mathrm{pbinom}(x, n, p) \qquad 1 - G(15) = 0.0008$

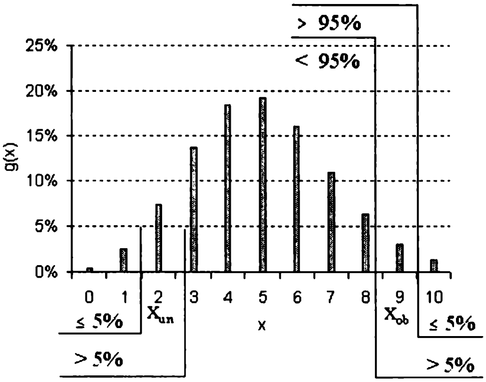


b) $G(7) = 0{,}5143 = 51{,}43\%$

6.23 Die Anzahl x der Sechserwürfe ist binomialverteilt mit n = 30 und p = 1/6;
Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 5$

B2 ▾ fx =BINOMVERT(A2;30;1/6;0)

	A	B	C	D	E
1	x	g(x)	G(x)		
2	0	0,42%	0,42%		
3	1	2,53%	2,95%		
4	2	7,33%	10,28%		
5	3	13,68%	23,96%		
6	4	18,47%	42,43%		
7	5	19,21%	61,64%		
8	6	16,01%	77,65%		
9	7	10,98%	88,63%		
10	8	6,31%	94,94%		
11	9	3,09%	98,03%		
12	10	1,30%	99,33%		
13	usw.				



$G(1) = 2{,}95\% \le 5\%$, $G(2) = 10{,}28\% > 5\% \Rightarrow x_{un} = 2$
$G(8) = 94{,}94\% < 95\%$ sowie $G(9) = 98{,}03\% \ge 95\% \Rightarrow x_{ob} = 9$
Das gesuchte Intervall lautet: $[x_{un}, x_{ob}] = [2, 9]$. Es handelt sich übrigens um den so genannten zweiseitigen 95%-Zufallsstreubereich für die Anzahl der Sechserwürfe.

6.24 Die Anzahl der Personen mit der Blutgruppe 0 unter 10 Personen ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,38.
g(5) + g(6 + ... + g(10) = 1 – G(4).

$g(0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}38^0 \cdot (1-0{,}38)^{10} = 0{,}0084$; $\quad g(1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}38^1 \cdot (1-0{,}38)^9 = 0{,}0514$;

$g(2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}38^2 \cdot (1-0{,}38)^8 = 0{,}1419$; $\quad g(3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}38^3 \cdot (1-0{,}38)^7 = 0{,}2319$;

$g(4) = \binom{10}{4} \cdot 0{,}38^4 \cdot (1-0{,}38)^6 = 0{,}2487$;

$1 - G(4) = 1 - [g(0) + g(1) + g(2) + g(3) + g(4)] = 1 - 0{,}6823 = 0{,}3177$

6.25 Die Anzahl der n Personen, die einen Flug gebucht haben, aber diesen tatsächlich nicht antreten, ist binomialverteilt mit den Parametern n und p = 0,05.

a) n = 101: Keine Überbelegung, wenn mindestens eine Person den Flug nicht antritt.

$g(0) = \binom{101}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1-0{,}05)^{101} = 0{,}0056$; $1 - G(0) = 1 - g(0) = 1 - 0{,}0056 = 0{,}9944$.

b) n =103; Keine Überbelegung, wenn mindestens drei Personen den Flug nicht antreten,

$g(0) = \binom{103}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1-0{,}05)^{103} = 0{,}0051$; $\quad g(1) = \binom{103}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot (1-0{,}05)^{102} = 0{,}0275$;

$g(2) = \binom{103}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot (1-0{,}05)^{101} = 0{,}0739$;

$1 - G(2) = 1 - [0{,}0051 + 0{,}0275 + 0{,}0739] = 0{,}8935$

c) n = 105: Keine Überbelegung, wenn mindestens fünf Personen den Flug nicht antreten,

$g(0) = \binom{105}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1-0{,}05)^{105} = 0{,}0046$; $\quad g(1) = \binom{105}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot (1-0{,}05)^{104} = 0{,}0253$;

$g(2) = \binom{105}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot (1-0{,}05)^{103} = 0{,}0693$; $\quad g(3) = \binom{105}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot (1-0{,}05)^{102} = 0{,}1252$;

$g(4) = \binom{105}{4} \cdot 0{,}05^4 \cdot (1-0{,}05)^{101} = 0{,}1680$; $1 - G(4) = 1 - [g(0) + ... g(4)] = 0{,}6076$

6.26 Die Anzahl, wie oft die Kugel auf dem Feld mit der Zahl 0 stehen bleibt, ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 1/37$.

a) $g(0) = \binom{100}{0} \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{100} = 0{,}0646 = 6{,}46\%$

b) $g(2) = \binom{100}{2} \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{98} = 0{,}2466 = 24{,}66\%$

c) $g(1) = \binom{100}{1} \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{99} = 0{,}1794$; $1 - G(2) = 1 - [g(0) + g(1) + g(2)] = 0{,}5094 = 50{,}94\%$

6.27 **a)** $g(0) = \frac{2{,}1^0}{0!} \cdot e^{-2{,}1} = 0{,}1225$

b) $G(5) = g(0) + g(1) + ... + g(5)$; $g(1) = \frac{2{,}1^1}{1!} \cdot e^{-2{,}1} = 0{,}2572$; $g(2) = \frac{2{,}1^2}{2!} \cdot e^{-2{,}1} = 0{,}2700$;

$g(3) = \frac{2{,}1^3}{3!} \cdot e^{-2{,}1} = 0{,}1890$; $g(4) = \frac{2{,}1^4}{4!} \cdot e^{-2{,}1} = 0{,}0992$; $g(5) = \frac{2{,}1^5}{5!} \cdot e^{-2{,}1} = 0{,}0417$;

$G(5) = 0{,}9796$

c) $g(2) + g(3) + ... = 1 - G(1) = 1 - [g(0) + g(1)] = 0{,}6204$

6.28 $g(4) + g(5) + g(6) + ... = 1 - [g(0) + g(1) + g(2) + g(3)] = 1 - G(3)$;

$g(0) = \frac{8^0}{0!} \cdot e^{-8} = 0{,}0003$; $g(1) = \frac{8^1}{1!} \cdot e^{-8} = 0{,}0027$; $g(2) = \frac{8^2}{2!} \cdot e^{-8} = 0{,}0107$;

$g(3) = \frac{8^3}{3!} \cdot e^{-8} = 0{,}0286$; $1 - G(3) = 0{,}9576$

6.29 Pro m^2 Prüfeinheit gibt es im Mittel 0,8 Webfehler; pro 5 m^2 ist die mittlere Webfehleranzahl μ gleich $5 \cdot 0{,}8 = 4$; $g(3) + g(4) + g(5) + ... = 1 - [g(0) + g(1) + g(2)] = 1 - G(2)$;

$g(0) = \frac{4^0}{0!} \cdot e^{-4} = 0{,}0183$; $g(1) = \frac{4^1}{1!} \cdot e^{-4} = 0{,}0733$; $g(2) = \frac{4^2}{2!} \cdot e^{-4} = 0{,}1465$; $1 - G(2) = 0{,}7619$

6.30 Die Anzahl von Ausschussstücken in einer Tagesproduktion von 1000 Stück ist binomialverteilt mit $n = 1000$ und $p = 1/200 = 0{,}005$. Da $n \geq 50$ und $p \leq 0{,}1$ kann diese Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung mit $\mu = n \cdot p = 5$ genähert werden.

a) $g(1) + g(2) + ... = 1 - g(0) = 1 - G(0)$;

$1 - G(0) = 0{,}9933$ (gleicher Wert bei Rechnung mit der Binomialverteilung)

b) $G(5) = g(0) + g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5)$;

$g(1) = \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} = 0{,}0337$; $g(2) = \frac{5^2}{2!} \cdot e^{-5} = 0{,}0842$; $g(3) = \frac{5^3}{3!} \cdot e^{-5} = 0{,}1404$;

$g(4) = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} = 0{,}1755$; $g(5) = \frac{5^5}{5!} \cdot e^{-5} = 0{,}1755$;

$G(5) = 0{,}6160$ (gleicher Wert bei Rechnung mit der Binomialverteilung)

6.31 Die jährliche Anzahl der arbeitsunfähigen Mitarbeiter unter 20000 Mitarbeitern ist binomialverteilt mit $n = 20000$ und $p = 0{,}0001$. Da $n \geq 50$ und $p \leq 0{,}1$ kann diese Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung mit $\mu = n \cdot p = 2$ genähert werden.

$g(4) + g(5) + g(6) + ... = 1 - [g(0) + g(1) + g(2) + g(3)] = 1 - G(3)$;

$g(0) = \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} = 0{,}1353$; $g(1) = \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = 0{,}2707$; $g(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 0{,}2707$;

$g(3) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = 0{,}1804$; $1 - G(3) = 0{,}1429$ (gleicher Wert bei Rechnung mit Binomialverteilung)

6.32 Im Mittel 8 Bläschen auf 100 Blechen $\Rightarrow$ im Mittel $\mu = 8/2 = 4$ Bläschen auf 50 Blechen.
$G(10) = g(0) + g(1) + g(2) + \ldots + g(10) = 0{,}9972$ (rechnergestützt gerechnet)

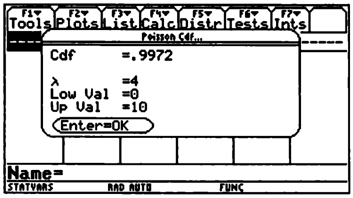
B1 f_x =POISSON(10;4;1)

	A	B	C
1	G(10; μ = 5) =	0,9972	

Mathcad:

$G(x,\mu) := \text{ppois}(x,\mu)$

$G(10,4) = 0.9972$



6.33 $\mu = 3{,}2$;

$g(0) = \frac{3{,}2^0}{0!} \cdot e^{-3{,}2} = 0{,}0408$; $\quad G(0) = 0{,}0408 \approx 4{,}8\% < 95\%$

$g(1) = \frac{3{,}2^1}{1!} \cdot e^{-3{,}2} = 0{,}1304$; $\quad G(1) = g(0) + g(1) = 0{,}1712 \approx 17{,}1\% < 95\%$

$g(2) = \frac{3{,}2^2}{2!} \cdot e^{-3{,}2} = 0{,}2087$; $\quad G(2) = g(0) + g(1) + g(2) = 0{,}3799 \approx 33{,}8\% < 95\%$

$g(3) = \frac{3{,}2^3}{3!} \cdot e^{-3{,}2} = 0{,}2226$; $\quad G(3) = g(0) + g(1) + \ldots + g(3) = 0{,}6025 \approx 60{,}3\% < 95\%$

$g(4) = \frac{3{,}2^4}{4!} \cdot e^{-3{,}2} = 0{,}1781$; $\quad G(4) = g(0) + g(1) + \ldots + g(4) = 0{,}7806 \approx 78{,}1\% < 95\%$

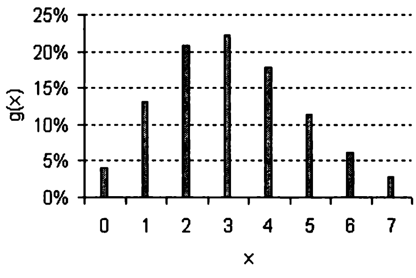
$g(5) = \frac{3{,}2^5}{5!} \cdot e^{-3{,}2} = 0{,}1140$; $\quad G(5) = g(0) + g(1) + \ldots + g(5) = 0{,}8946 \approx 89{,}5\% < 95\%$

$g(6) = \frac{3{,}2^6}{6!} \cdot e^{-3{,}2} = 0{,}0687$ $\quad G(6) = g(0) + g(1) + \ldots + g(6) = 0{,}9554 \approx 99{,}5\% \geq 95\%$

G(6) ist erstmals mindestens gleich 95%; mit bis zu 6 Fehlern ist zu rechnen

B2 f_x =POISSON(A2;3,2;0)

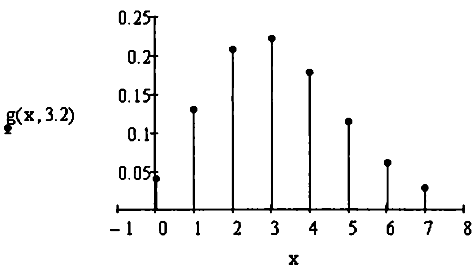
	A	B	C	D
1	x	g(x)	G(x)	
2	0	0,0408	4,1%	
3	1	0,1304	17,1%	
4	2	0,2087	38,0%	
5	3	0,2226	60,3%	
6	4	0,1781	78,1%	
7	5	0,1140	89,5%	
8	6	0,0608	95,5%	G(6) erstmals
9	7	0,0278	98,3%	mindestens
10	usw.			gleich 95%



Mathcad: $x := 0..7$

$g(x,\mu) := \text{dpois}(x,\mu)$ $\quad G(x,\mu) := \text{ppois}(x,\mu)$

x =	g(x,3.2) =	G(x,3.2) =
0	0.0408	0.0408
1	0.1304	0.1712
2	0.2087	0.3799
3	0.2226	0.6025
4	0.1781	0.7806
5	0.1140	0.8946
6	0.0608	0.9554
7	0.0278	0.9832



6.34 Im Mittel 0,1 Staubpartikel pro 1 cm^2 $\Rightarrow$ im Mittel $\mu = 100 \cdot 0{,}1 = 10$ Staubpartikel pro 100 cm^2.
$1 - G(12) = 0{,}2084$ (rechnergestützt gerechnet)

B1 ▾ fx =POISSON(12;10;1)

	A	B	C
1	G(12; μ = 10) =	0,7916	
2	1 - G(12; μ = 10) =	0,2084	

Mathcad:
$G(x,\mu) := \text{ppois}(x,\mu)$
$1 - G(12,10) = 0.2084$

6.35 On the average $\mu = 15$ calls per hour

a) B1 ▾ fx =POISSON(10;15;0)

	A	B	C	D
1	g(10) =	0,0486		

Mathcad:
$g(x,\mu) := \text{dpois}(x,\mu) \qquad g(10,15) = 0.0486$

b) B1 ▾ fx =1-POISSON(14;15;1)

	A	B	C	D
1	1-G(14) =	0,5343		

Mathcad:
$G(x,\mu) := \text{ppois}(x,\mu) \qquad 1 - G(14,15) = 0.5343$

c) On the average $\mu = 7{,}5$ calls per half an hour

B1 ▾ fx =POISSON(10;7,5;1)

	A	B	C	D
1	G(10) =	0,8622		

Mathcad:
$G(x,\mu) := \text{ppois}(x,\mu) \qquad G(10,7.5) = 0.8622$

6.36 On the average 0,1 errors per page $\Rightarrow$ on the average $\mu = 200 \cdot 0{,}1 = 20$ errors in 200 pages.
$1 - G(20) = 1 - 0{,}5591 = 0{,}4409$

B1 ▾ fx =1-POISSON(20;20;1)

	A	B	C	D
1	1-G(20) =	0,4409		

Mathcad:
$G(x,\mu) := \text{ppois}(x,\mu) \qquad 1 - G(20,20) = 0.$

6.37 **a)** $\mu = 8$ Kunden pro Stunde; $g(4) = \frac{8^4}{4!} \cdot e^{-3,2} = 0{,}0573$

b) $\mu = 16$ Kunden pro zwei Stunden; $1 - G(25) = 0{,}0131$

B1 ▾ fx =1-POISSON(25;16;1)

	A	B	C	D
1	1-G(25) =	0,0131		

Mathcad:
$G(x,\mu) := \text{ppois}(x,\mu) \qquad 1 - G(25,16) = 0.0131$

6.38 $\mu = 0{,}3 \cdot 10 = 3$ Aufträge pro Woche

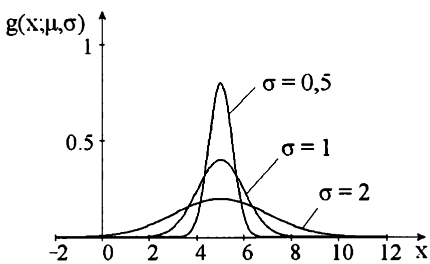
a) Der Techniker kommt nach seinem letzten Besuch innerhalb der nächsten Wochenperiode nicht, wenn in dieser Zeit nur höchstens 2 Aufträge vorliegen;

$$g(0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} = 0{,}0498\,;\; g(1) = \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} = 0{,}1494\,;\; g(2) = \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} = 0{,}2240\,;$$

$$G(2) = g(0) + g(1) + g(2) = 0{,}4323$$

b) Mindestens noch zwei weitere Aufträge; $1 - G(1) = 1 - [g(0) + g(1)] = 0{,}8009$

6.39 **a)** Zwischen 2 und 8
b) Zwischen –1 und 11
c) Zwischen 3,5 und 6,5



6.40 Die Quantile u_p können mit Hilfe der Tabelle 1, Lehrbuch Seite 355, durch lineare Interpolation ermittelt werden.

a) $G(u) = 0{,}5 \;\Rightarrow\; u_{0,5} = 0$

b) $G(u) = 0{,}6;\;\; G(0{,}25) = 0{,}5987;\;\; G(0{,}26) = 0{,}6026;$

$$u_{0,6} \approx 0{,}25 + \frac{0{,}6-0{,}5987}{0{,}6026-0{,}5987}\cdot(0{,}26-0{,}25) = 0{,}25 + \frac{13}{39}\cdot 0{,}01 = 0{,}2533;$$

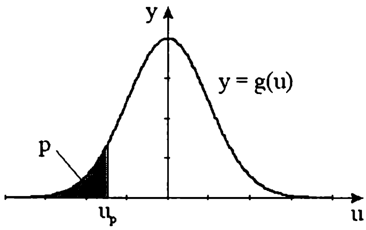
0,6 liegt um 13 Zehntausendstel über dem Tabellenwert 0,5987;
0,6026 liegt um 0,0039 = 39 Zehntausendstel über 0,5987;
0,26 ist um den Bruchteil $\frac{13}{39}$ von 0,01 zu vergrößern, um näherungsweise $u_{0,6}$ zu erhalten.

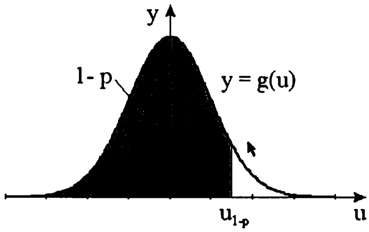
c) $G(u) = 0{,}9;\;\; G(1{,}28) = 0{,}8997;\; G(1{,}29) = 0{,}9015;$

$$u_{0,9} \approx 1{,}28 + \frac{3}{18}\cdot 0{,}01 = 1{,}2817 \;\; \text{(genauer: 1,2816)}$$

d) $G(u) = 0{,}975;\;\; G(1{,}96) = 0{,}975;\;\; u_{0,975} = 1{,}9600$

e) Ist p kleiner als 0,5, so berechnet man zuerst das den u-Wert zu 1-p, also das Quantil u_{1-p} und verwendet dann, dass $u_p = -u_{1-p}$ (siehe die folgende Abbildung).





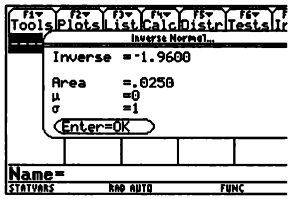
$G(u) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \;\Rightarrow\; u_{0,9} \approx 1{,}2817$ (siehe c)); $u_{0,1} = -u_{0,9} \approx -1{,}2817$ (genauer: - 1,2816)

f) $G(u) = 0{,}025;$ zuerst: $G(u) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975 \;\Rightarrow\; u_{0,975} = 1{,}9600$ (siehe d)).
$u_{0,025} = -u_{0,975} = -1{,}9600.$

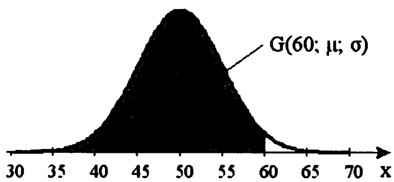
D1 ▾ fx =NORMINV(B1;B2;B3)

	A	B	C	D	E
1	p =	0,025	u_p =	-1,9600	
2	μ =	0			
3	σ =	1			

Mathcad:
$u(p,\mu,\sigma) := \text{qnorm}(p,\mu,\sigma)$
$u(0.025,0,1) = -1.9600$



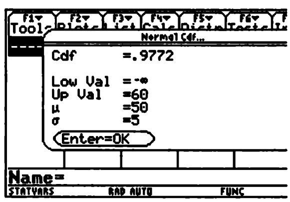
6.41 a) $G(60;\, 50,\, 5) = G\left(\frac{60-50}{5}\right) = G(2) = 0{,}9772$



D1 ▾ fx =NORMVERT(B1;B2;B3;1)

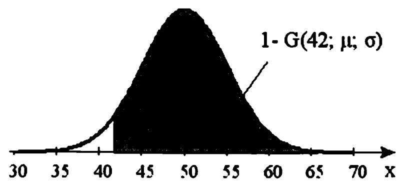
	A	B	C	D	E
1	x=	60	G(60; 50,5) =	0,9772	
2	μ =	50			
3	σ =	5			

Mathcad:
$G(x,\mu,\sigma) := \text{pnorm}(x,\mu,\sigma)$
$G(60,50,5) = 0.9772$



6.41 **b)** $1 - G(42) = 1 - G\left(\frac{42-50}{5}\right) = 1 - G(-1{,}6) =$

$= 1 - [1 - G(1{,}6)] = G(1{,}6) = 0{,}9452$

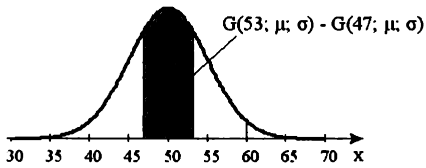


c) 0

d) $G(53;\, 50{,}5) - G(47;\, 50{,}5) = G\left(\frac{53-50}{5}\right) - G\left(\frac{47-50}{5}\right) =$

$= G(0{,}6) - G(-0{,}6) = G(0{,}6) - [\,1 - G(0{,}6)] =$

$= 2 \cdot G(0{,}6) - 1 = 2 \cdot 0{,}7257 - 1 = 0{,}4515$

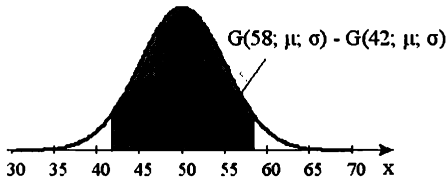


e) $G(58;\, 50{,}5) - G(42;\, 50{,}5) =$

$= G\left(\frac{58-50}{5}\right) - G\left(\frac{42-50}{5}\right) = G(1{,}6) - G(-1{,}6) =$

$= G(1{,}6) - [1 - G(1{,}6)] = 2 \cdot G(1{,}6) - 1 =$

$= 2 \cdot 9452 - 1 = 0{,}8904$



6.42 **a)** $G(249{,}70;\, 250,\, 0{,}15) = G\left(\frac{249{,}70-250}{0{,}15}\right) = G(-2) = 1 - G(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

b) $G(250{,}10;\, 250,\, 0{,}15) - G(249{,}80;\, 250,\, 0{,}15) = G\left(\frac{250{,}10-250}{0{,}15}\right) - G\left(\frac{249{,}80-250}{0{,}15}\right) =$

$= G\left(\frac{2}{3}\right) - G\left(-\frac{4}{3}\right) = G\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - G\left(\frac{4}{3}\right)\right] = 0{,}7475 - (1 - 0{,}9088) = 0{,}6563$

c) $1 - G(250{,}35;\, 250,\, 0{,}15) = 1 - G\left(\frac{250{,}35-250}{0{,}15}\right) = 1 - G\left(\frac{7}{3}\right) = 1 - 0{,}9902 = 0{,}0098$

d) $G(250{,}35;\, 250,\, 0{,}15) - G(249{,}65;\, 250,\, 0{,}15) = G\left(\frac{250{,}35-250}{0{,}15}\right) - G\left(\frac{249{,}65-250}{0{,}15}\right) =$

$= G\left(\frac{7}{3}\right) - G\left(-\frac{7}{3}\right) = G\left(\frac{7}{3}\right) - \left[1 - G\left(\frac{7}{3}\right)\right] = 2 \cdot G\left(\frac{7}{3}\right) - 1 = 2 \cdot 0{,}9902 - 1 = 0{,}9804;$

$1 - [\,G(250{,}35;\, 250,\, 0{,}15) - G(249{,}65;\, 250,\, 0{,}15)] = 1 - 0{,}9804 = 0{,}0196$

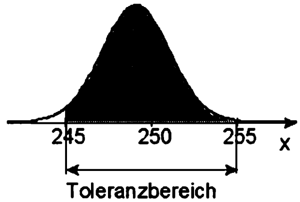
6.43 Anteil *innerhalb* des Toleranzbereiches:

$G(255;\, 249,\, 2) - G(245;\, 249,\, 2) =$

$G\left(\frac{255-249}{2}\right) - G\left(\frac{245-249}{2}\right) = G(3) - G(-2) = G(3) - [1 - G(2)] =$

$= G(3) + G(2) - 1 = 0{,}9987 + 0{,}9772 - 1 = 0{,}9759;$

Anteil *außerhalb* des Toleranzbereiches: $1 - 0{,}9759 = 0{,}0241$



6.44 **a)** $1 - G(0{,}8;\, 0{,}6;\, 0{,}08) = 1 - G\left(\frac{0{,}8-0{,}6}{0{,}08}\right) = 1 - G(2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$

b) $1 - G(x;\, 0{,}6;\, 0{,}08) = 1 - G\left(\frac{x-0{,}6}{0{,}08}\right) = 0{,}01;\quad G\left(\frac{x-0{,}6}{0{,}08}\right) = 0{,}99;\quad \frac{x-0{,}6}{0{,}08} = u_{0{,}99} = 2{,}3263;$

$x = 0{,}6 + 2{,}3263 \cdot 0{,}08 = 0{,}7861\ \text{s} \approx 0{,}79\ \text{s}$

6.45 Ausschussanteil von M_1:

$$1 - [G(252; 249, 1) - G(248; 249, 1)] = 1 - \left[G\left(\frac{252-249}{1}\right) - G\left(\frac{248-249}{1}\right)\right] = 1 - [G(3) - G(-1)] =$$

$$= 1 - [G(3) - (1 - G(1))] = 2 - G(3) - G(1) = 2 - 0{,}9987 - 0{,}8413 = 0{,}1600 = 16{,}0\%$$

Ausschussanteil von M_2:

$$1 - [G(252; 249{,}5; 1{,}5) - G(248; 249{,}5; 1{,}5)] = 1 - \left[G\left(\frac{252-249{,}5}{1{,}5}\right) - G\left(\frac{248-249{,}5}{1{,}5}\right)\right] =$$

$$= 1 - \left[G\left(\frac{5}{3}\right) - G(-1)\right] = 1 - \left[G\left(\frac{5}{3}\right) - (1 - G(1))\right] = 2 - G\left(\frac{5}{3}\right) - G(1) =$$

$$= 2 - 0{,}9522 - 0{,}8413 = 0{,}2064 \approx 20{,}6\%;$$ M_2 hat den größeren Ausschussanteil

6.46 Anteil brauchbarer Widerstände:

$$G(210; 200, 10) - G(182; 200, 10) = G\left(\frac{210-200}{10}\right) - G\left(\frac{182-200}{10}\right) = G(1) - G(-1{,}8) =$$

$$= G\left(\frac{210-200}{10}\right) - G\left(\frac{182-200}{10}\right) =' G(1) - G(-1{,}8) = G(1) - [1 - G(1{,}8)] = G(1) + G1{,}8) - 1 =$$

$= 0{,}8413 + 0{,}9641 - 1 = 0{,}8054$; $8000 \cdot 0{,}8054 \approx 6440$ Stück sind brauchbar

6.47 **a)** $1 - G(90; 100, 5) = 1 - G\left(\frac{90-100}{5}\right) = 1 - G(-2) = 1 - [1 - G(2)] = G(2) = 0{,}9772 \approx 97{,}7\%$

b) $1\text{-}G(x; 100, 5) = 0{,}01$; $G(x; 100, 5) = 0{,}99$; $G\left(\frac{x-100}{5}\right) = 0{,}99$; $\frac{x-100}{5} = u_{0.99} = 2{,}3263$;

$x = 100 + 2{,}3263 \cdot 5 \approx 111{,}6\ \Omega$

c) Intervall $[100 - c; 100 + c]$; 5% der Werte liegen rechts von $100 + c$:

$1 - G(100{+}c; 100, 5) = 0{,}05$; $G(100{+}c; 100, 5) = 0{,}95$; $G\left(\frac{100+c-100}{5}\right) = G\left(\frac{c}{5}\right) = 0{,}95$;

$\frac{c}{5} = u_{0{,}95} = 1{,}6449$; $c \approx 8{,}2\ \Omega$; gesuchtes Intervall: $91{,}8\ \Omega \le x \le 108{,}2\ \Omega$

6.48 **a)** $1 - G(232{,}5; 231; 1) = 1 - G\left(\frac{232{,}5-231}{1}\right) = 1 - G(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 \approx 6{,}7\%$

b) $1 - G(232{,}5; 231, \sigma) = 1 - G\left(\frac{232{,}5-231}{\sigma}\right) = 0{,}005$; $G\left(\frac{232{,}5-231}{\sigma}\right) = 0{,}995$;

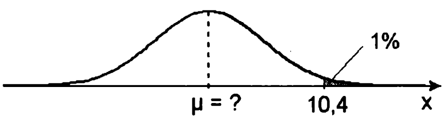
$\frac{232{,}5-231}{\sigma} = u_{0{,}995} = 2{,}5758$; $\sigma = \frac{1{,}5}{2{,}5758} \approx 0{,}58$ mm

c) Intervall $[231 - c; 231 + c]$; bis $231 + c$ liegen 99,5% der Werte (nur 0,5% liegen darüber);

$G(231 + c; 231, 1) = 0{,}995$; $G\left(\frac{231+c-231}{1}\right) = G(c) = 0{,}995$; $c = u_{0{,}995} = 2{,}5758 \approx 2{,}58$ mm;

gesuchtes Intervall: $228{,}42 \le x \le 233{,}58$

6.49



Überschreitungsanteil $1 - G(10{,}4; \mu; 0{,}1) \le 1\%$, gerechnet wird $1 - G(10{,}4; \mu; 0{,}1) = 1\%$;

$1 - G\left(\frac{10{,}4-\mu}{0{,}1}\right) = 0{,}01$; $G\left(\frac{10{,}4-\mu}{0{,}1}\right) = 0{,}99$; $\frac{10{,}4-\mu}{0{,}1} = u_{0{,}99} = 2{,}3263$;

$\mu = 10{,}4 + 2{,}3264 \cdot 0{,}1 = 10{,}17$ g; μ darf höchstens 10,17 g sein

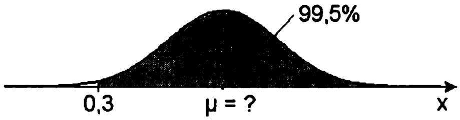
6.50 $G(90; 100, \sigma) = G\left(\frac{90-100}{\sigma}\right) = 0{,}01$; $\frac{90-100}{\sigma} = u_{0{,}01} = -u_{0{,}99} = -2{,}3263$; $\sigma = \frac{90-100}{-2{,}3263} \approx 4{,}3$ N

6.51 **a)** $1 - G(20{,}15;\, 20;\, 0{,}05) = 1 - G\left(\frac{20{,}15-20}{0{,}05}\right) = 1 - G(3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$

b) $1 - G(20{,}15;\, 20;\, \sigma) = 0{,}02$; $G(20{,}15;\, 20;\, \sigma) = 0{,}98$; $G\left(\frac{20{,}15-20}{\sigma}\right) = 0{,}98$;

$\frac{20{,}15-20}{\sigma} = u_{0{,}98} = 2{,}0537$; $\sigma = 0{,}073$ g

6.52 $1 - G(0{,}3;\, \mu;\, 0{,}005) = 0{,}995$;

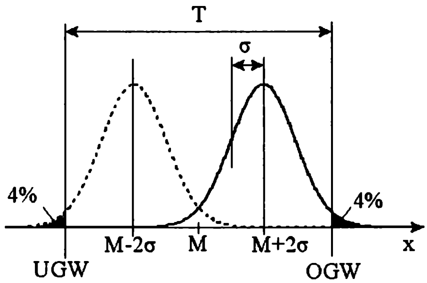


$G(0{,}3;\, \mu;\, 0{,}005) = 0{,}005$; $G\left(\frac{0{,}3-\mu}{0{,}005}\right) = 0{,}005$;

$\frac{0{,}3-\mu}{0{,}005} = u_{0{,}005} = -u_{0{,}995} = -2{,}5758$;

$\mu = 0{,}3 + 2{,}5758 \cdot 0{,}005 \approx 0{,}313\ l$

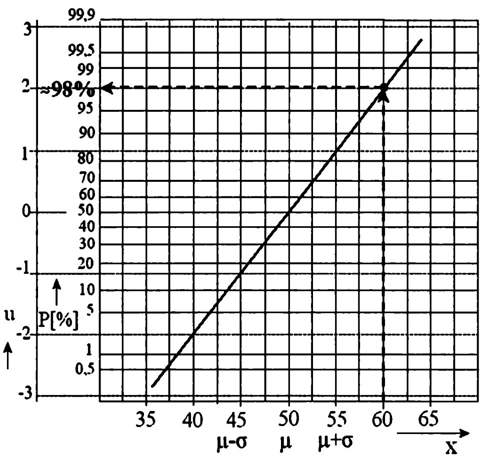
6.53 Es sei OGW der obere, UGW der untere Grenzwert, M der Wert in der Mitte und T die Länge des Toleranzbereiches;
Verschiebt man μ um 2σ aus der Mitte M nach oben in die Lage M+2σ (durchgezogene Glocke in der Abbildung), so ist der Anteil, der dann den unteren Grenzwert UGW unterschreitet, praktisch null. Entsprechendes gilt für eine Verschiebung von μ in die Lage M-2σ für den Überschreitungsanteil. Der Ausschussanteil ist daher *entweder* nur ein Unterschreitungsanteil *oder* nur ein Überschreitungsanteil.

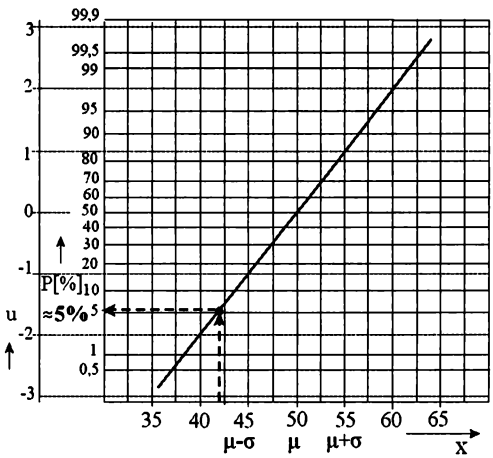


$1 - G(\text{OGW};\, \text{M}+2\sigma,\sigma) = 0{,}04$ oder $G(\text{OGW};\, \text{M}+2\sigma,\sigma) = 0{,}96$; $\frac{\text{OGW}-\text{M}-2\cdot 0{,}02}{0{,}02} = u_{0{,}96} = 1{,}7507$;

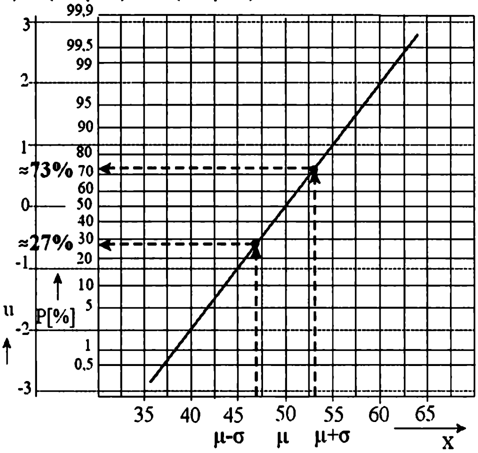
daraus OGW-M = T/2 = 0,075; T = 0,15 mm

6.54 **a)** $G(60;\mu,\sigma) \approx 98\%$ **b)** Man liest $G(42;\mu,\sigma)$ ab und bildet $1 - G(42;\mu,\sigma) \approx 95\%$

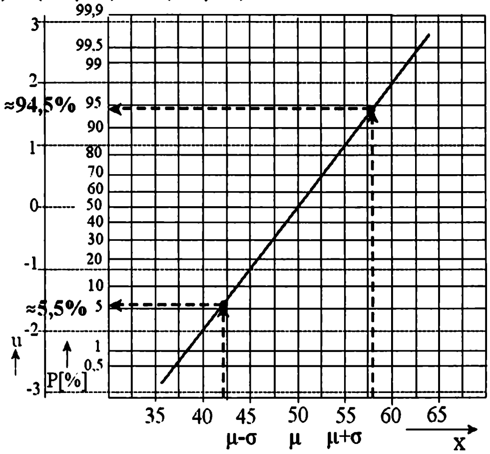




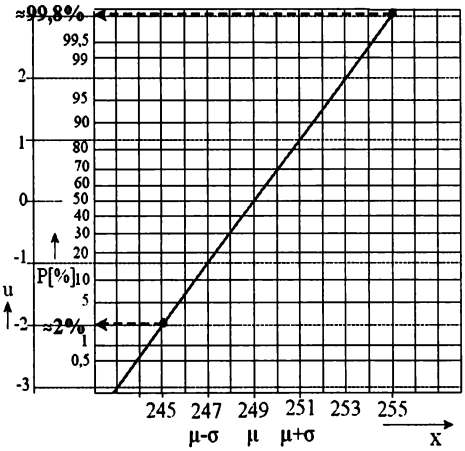
d) G(53;μ,σ) – G(47;μ,σ) ≈ 73% - 27% = 46%



e) G(58;μ,σ) – G(42;μ,σ) ≈ 94,5% - 5,5% = 89%



6.55



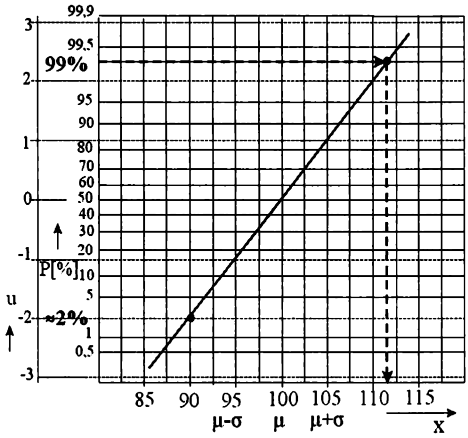
1 – [G(255; μ,σ) – G(245; μ,σ)] ≈
≈ 100% - (99,8% - 2%) = 2,2%

6.56 Abbildungen nächste Seite

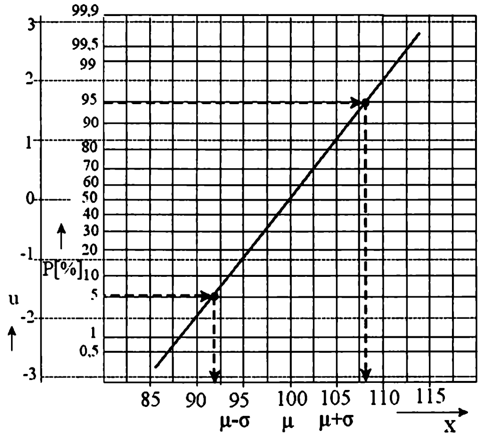
a) Etwa 2% der Bauteile haben erwartungsgemäß einen Widerstand unter 90 Ω; d.h. 98% der Bauteile halten den Mindestwiderstand 90 Ω ein

b) Etwa 99% der Bauteile übersteigen den Wert 112 Ω, der also nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% überstiegen wird

c) 5% der Bauteile haben einen Widerstand höchstens gleich etwa 92 Ω; 95% einen solchen bis höchstens 108 Ω; dazwischen liegen 90% der Bauteile mit einem Widerstand von 92 Ω bis 108 Ω.

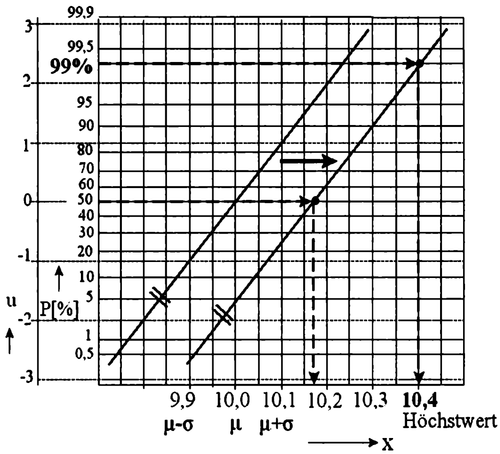


Zu Aufgabe 6.56 a) und zu b)



Zu Aufgabe 6.56 c)

6.57



Man trägt den Höchstwert 10,4 auf der x-Achse nahe dem rechten Rand des Wahrscheinlichkeitsnetzes auf. Danach zeichnet man eine Gerade mit $\sigma = 0{,}1$; in der Abbildung wurde eine solche mit $\mu = 10{,}0$ gewählt. Diese Gerade wird so weit parallel nach rechts verschoben, bis sie am Höchstwert $x = 10{,}4$ den Wert $P = 99\%$ erreicht.
Für $P = 50\%$ liest man nun das größtmögliche μ ab: $\approx 10{,}18$ g.

6.58 Die Anzahl der Sechserwürfe ist binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 1/6$. Da $n \cdot p \cdot (1-p) = 41{,}7 > 9$, ist die NV-Näherung möglich.

a) $G_{Bin}(39) \approx G(u)$ mit $u = \dfrac{39+0{,}5-300\cdot 1/6}{\sqrt{300\cdot 1/6\cdot(1-1/6)}} = -1{,}6267$; $G_{Bin}(39) \approx G(-1{,}6267) = 0{,}0519 \approx 5{,}2\%$

Exakt (rechnergestützt): $G_{Bin}(39) \approx 4{,}9\%$

b) $G_{Bin}(55) - G_{Bin}(44) \approx G(u_2) - G(u_1)$ mit $u_2 = \dfrac{55+0{,}5-300\cdot 1/6}{\sqrt{300\cdot 1/6\cdot(1-1/6)}} = 0{,}8521$ und

$$u_2 = \frac{44+0{,}5-300\cdot 1/6}{\sqrt{300\cdot 1/6\cdot(1-1/6)}} = -0{,}8521\,.$$

$G_{Bin}(55) - G_{Bin}(44) \approx G(0{,}8521) - G(-0{,}8521) = 0{,}8029 - 0{,}1971 = 0{,}6058 \approx 60{,}6\%$,
Exakt (rechnergestützt): $G_{Bin}(55) - G_{Bin}(44) = 0{,}6059 \approx 60{,}6\%$

6.59 Die Anzahl der fehlerhaft übertragenen Bits ist binomialverteilt mit $n = 10^7$ und $p = 10^{-5}$. Da $n \cdot p \cdot (1-p) \approx 100 > 9$, ist die NV-Näherung möglich.

$1 - G_{Bin}(80) \approx 1 - G(u)$ mit $u = \dfrac{80+0{,}5-10^7\cdot 10^{-5}}{\sqrt{10^7\cdot 10^{-5}\cdot(1-10^{-5})}} = -1{,}9500$; $1 - G_{Bin}(80) \approx 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744$.

6.60 Die Anzahl der fehlerhaften Chips ist binomialverteilt mit n = 1000 und p = 3%. Da $n \cdot p \cdot (1-p) = 29{,}1 > 9$, ist die NV-Näherung möglich.

a) $G_{Bin}(40) \approx G(u)$ mit $u = \dfrac{40+0{,}5-1000 \cdot 0{,}03}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot (1-0{,}03)}} = 1{,}9464$; $G_{Bin}(40) \approx 97{,}4\%$.

Exakt (rechnergestützt): $G_{Bin}(40) = 97{,}0\%$

b) $1 - G_{Bin}(24) \approx 1 - G(u)$ mit $u = \dfrac{24+0{,}5-1000 \cdot 0{,}03}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot (1-0{,}03)}} = -1{,}0196$;

$1 - G_{Bin}(24) \approx 1 - G(-1{,}0196) = 1 - 0{,}1540 \approx 84{,}6\%$.
Exakt rechnergestützt): $1 - G_{Bin}(24) = 1 - 0{,}1534 \approx 84{,}7\%$

6.61 Die Anzahl der fehlerhaften Steckverbindungen ist binomialverteilt mit n = 200 und p = 75/1500 = 5%. Exakter Wert (rechnergestützt): $G_{Bin}(15) = 0{,}9556 \approx 95{,}6\%$

a) Näherung durch Poisson-Verteilung mit $\mu = n \cdot p = 10$ möglich, weil $n \geq 50$ und $p \leq 10\%$:
$G_{Bin}(15) \approx G_{Poisson}(15) = 0{,}9513 \approx 95{,}1\%$ (rechnergestützt)

b) Näherung durch Normalverteilung möglich, weil $n \cdot p \cdot (1-p) = 9{,}5 > 9$:
$G_{Bin}(15) \approx G(u)$ mit $u = \dfrac{15+0{,}5-200 \cdot 0{,}05}{\sqrt{200 \cdot 0{,}05 \cdot (1-0{,}05)}} = 1{,}7844$; $G_{Bin}(15) \approx G(1{,}7844) = 0{,}9628 \approx 96{,}3\%$

6.62 Näherung durch Normalverteilung möglich, weil μ der Poissonverteilung > 9 ist;
$G_{Poisson}(459) \approx G(u)$ mit $u = \dfrac{459+0{,}5-500}{\sqrt{500}} = -1{,}8112$; $G_{Poisson}(459) \approx G(-1{,}811) = 0{,}0351 \approx 3{,}5\%$;
Exakter Wert (rechnergestützt): $G_{Poisson}(459) = 0{,}0337 \approx 3{,}4\%$

6.63 Mittelwerte normalverteilt mit

a) $\mu_{\bar{x}} = 100, \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{4}} = 2{,}5$ **b)** $\mu_{\bar{x}} = 100, \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{25}} = 1$ **c)** $\mu_{\bar{x}} = 100, \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$

6.64 **a)** $G(10{,}03;\, 10{,}02;\, 0{,}03) - G(10{,}00;\, 10{,}02;\, 0{,}03) = G\left(\dfrac{10{,}03-10{,}02}{0{,}03}\right) - G\left(\dfrac{10{,}00-10{,}02}{0{,}03}\right) =$

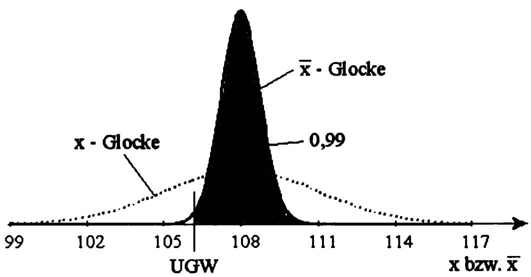
$= G\left(\dfrac{0{,}01}{0{,}03}\right) - G\left(\dfrac{-0{,}02}{0{,}03}\right) = G\left(\dfrac{1}{3}\right) - \left[1 - G\left(\dfrac{2}{3}\right)\right] = 0{,}6306 - [1 - 0{,}7475] = 0{,}3781 \approx 37{,}8\%$

b) $\mu_{\bar{x}} = 10{,}02$ cm, $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{0{,}03}{\sqrt{9}} = 0{,}01$ cm;

$G(10{,}03;\, 10{,}02;\, 0{,}01) - G(10{,}00;\, 10{,}02;\, 0{,}01) = G\left(\dfrac{10{,}03-10{,}02}{0{,}01}\right) - G\left(\dfrac{10{,}00-10{,}02}{0{,}01}\right) =$

$= G\left(\dfrac{0{,}01}{0{,}01}\right) - G\left(\dfrac{-0{,}02}{0{,}01}\right) = G(1) - [1 - G(2)] = 0{,}8413 - [1 - 0{,}9772] = 0{,}8186 \approx 81{,}9\%$

6.65 Die Mittelwerte von Stichproben des Umfangs n = 16 sind normalverteilt mit
$\mu_{\bar{x}} = 108$ N und $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{16}} = 0{,}75$ N.
$1 - G(x;\, \mu_{\bar{x}},\, \sigma_{\bar{x}}) = 0{,}99$ oder
$G(x;\, \mu_{\bar{x}},\, \sigma_{\bar{x}}) = 0{,}01$;
$\dfrac{UGW-108}{0{,}75} = u_{0{,}01} = -2{,}3263$;
daraus: UGW = 106,3 N



6.66 a), b), c)

Simulation in Mathcad: Neuberechnung durch Strg F9

Startindex (ORIGIN) im Menü Extras/Arbeitsplattoptionen auf 1 setzen!

Anzahl der Stichproben: $N := 50$ Normalverteilung mit $\mu := 100$ $\sigma := 2$

N Stichproben von 5 normalverteilten Zufallszahlen: $k := 1..N$ $Stpr_k := morm(5, \mu, \sigma)$

Standardabweichungen und Varianzen der N Stichproben

$s_k := Stdev(Stpr_k)$ $v_k := Var(Stpr_k)$

$$Stpr_1 = \begin{pmatrix} 99.795 \\ 101.768 \\ 102.841 \\ 99.423 \\ 100.824 \end{pmatrix}$$

s =

	1
1	1.408
2	0.951
3	2.105
4	1.357
5	1.778
6	1.498
7	2.053
8	2.035
9	...

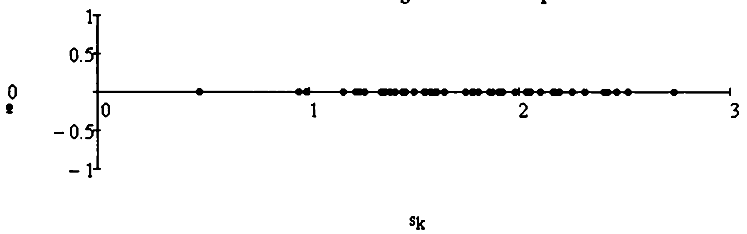
v =

	1
1	1.982
2	0.904
3	4.432
4	1.841
5	3.162
6	2.244
7	4.217
8	4.142
9	...

Mittelwert der N Standardabweichungen: $mittelwert(s) = 1.719$

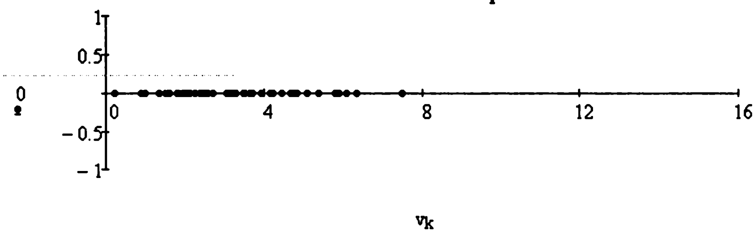
Mittelwert der N Varianzen: $mittelwert(v) = 3.181$

Standardabweichungen der N Stichproben



Die Stichprobenstandardabweichungen streuen um $\sigma = 2$. Man kann zeigen, dass die Stichprobenstandardabweichung s die Größe σ im Mittel unterschätzt. Sie ist daher nicht erwartungstreu.

Varianzen der N Stichproben



Die Stichprobenvarianzen streuen um $\sigma^2 = 4$. Man kann zeigen, dass die Stichprobenvarianz die Größe σ im Mittel richtig schätzt. Sie schätzt daher σ^2 erwartungstreu.

6.67 **Simulation in Mathcad**: Neuberechnung durch Strg F9

Startindex (ORIGIN) im Menü Extras/Arbeitsplattoptionen auf 1 gesetzt!

Anzahl der Stichproben: $\mathbf{N := 100}$ Normalverteilung mit $\mu := 100$ $\sigma := 2$

N Stichproben von 5 normalverteilten Zufallszahlen: $\mathbf{k := 1 .. N}$ $\mathbf{Stpr_k := rnorm(5, \mu, \sigma)}$

Varianzen der N Stichproben $\mathbf{v_k := Var(Stpr_k)}$

$c_k := 4 \cdot \frac{(v_k)^2}{16}$ ist χ^2-verteilt mit 4 Freiheitsgraden.

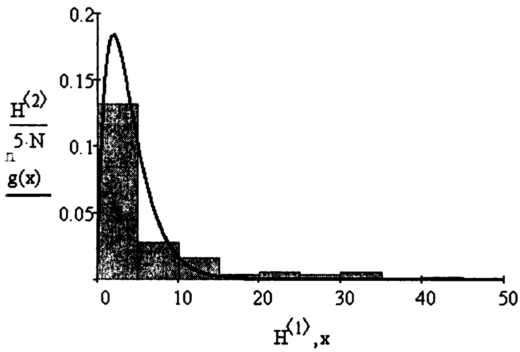
$\mathbf{j := 1 .. 11}$ $\mathbf{Klassengrenzen_j := 5 \cdot (j - 1)}$ Damit lauten die Klassengrenzen: 0, 5, ..., 50

$\mathbf{H := Histogramm(Klassengrenzen, c)}$

Dichtefunktion der χ^2-Verteilung mit f = 4 Freiheitsgraden: $\mathbf{g(x) := dchisq(x, 4)}$

H =

	1	2
1	2.5	66
2	7.5	14
3	12.5	8
4	17.5	2
5	22.5	3
6	27.5	2
7	32.5	3
8	37.5	0
9	42.5	1
10	47.5	0



Der Inhalt der Fläche unter der Dichtefunktion der χ^2-Verteilung ist 1. Zum Vergleich mit dem Histogramm muss dessen Flächeninhalt auf 1 normiert werden. Dies geschieht bei einer Klassenbreite 5 durch Division der absoluten Klassenhäufigkeiten durch 5*N.
Genauso gut könnte man auch die Flächeninhalte angleichen, indem man die Dichtefunktion der χ^2-Verteilung mit 5*N multipliziert.

7 Schließende Statistik

7.1 a) ist richtig; je höher das Vertrauensniveau, desto geringer die Aussagegenauigkeit und dementsprechend größer der Vertrauensbereich

7.2 Das folgende Programm für den Voyage 200 ist einfach gehalten und enthält keine Ausgabegestaltung. Es wird mit vb() aufgerufen.

```
vb()
Prgm
ClrIO
Local x,n,w
Dialog
Title "Vertrauensbereich für p"
Request "x  ", x  : Request "n  ", n
Request "1-α (in %)", w
EndDlog
expr(x)→ x : expr(n)→ n : expr(w)→ w
w/100 → w
Define ggb(x,n,p) = Σ(nCr(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k),k,0,x)
Disp nSolve(ggb(x-1,n,pun)=(1+w)/2,pun)| pun>0 and pun<x/n
Disp nSolve(ggb(x,n,pob)=(1-w)/2,pob)| pob>x/n
EndPrgm
```

7.3 $p = 8\%, n = 50$

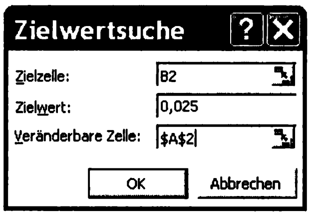
Vertrauensbereich, wenn $x = 0$: $p_{un} = 0$; p_{ob} aus $G(x; n, p_{ob}) = 0{,}025$

B2 =BINOMVERT(0;50;A2;1)

	A	B	C
1	pob	G(0;50,pob)	
2	0	1	

B2 =BINOMVERT(0;50;A2;1)

	A	B	C
1	pob	G(0;50,pob)	
2	0,071121676	0,025000082	



Eventuell im Menü *Extras/Optionen* auf der Registerkarte *Berechnung* die *Maximale Änderung* verringern!

Mathcad: $x := 0 \quad n := 50$ Startwert: $pob := \frac{x}{n}$

$\text{wurzel}(\text{pbinom}(x,n,pob) - 0.025, pob) = 0.071$

Vertrauensbereich, wenn $x = 1$: p_{un} aus $G(x-1; n, p_{un}) = 0{,}975$; p_{ob} aus $G(x; n, p_{ob}) = 0{,}025$

B2 =BINOMVERT(0;50;A2;1)

	A	B	C	D
1	pun	G(0,50,pun)	pob	G(1;50,pob)
2	2,0%	0,36416968	2,0%	0,735771394

D2 =BINOMVERT(1;50;C2;1)

	A	B	C	D
1	pun	G(0,50,pun)	pob	G(1;50,pob)
2	0,1%	0,974555764	10,6%	0,025127977

Als Startwert kann x/n, hier 1/50 = 0,02 = 2%, dienen.

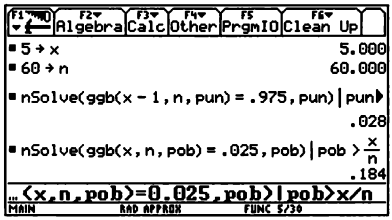
Mathcad: $x := 1 \quad n := 50$ Startwert: $pun := 0$ bzw. $pob := \frac{x}{n}$

$\text{wurzel}(\text{pbinom}(x-1,n,pun) - 0.975, pun) = 0.001$

$\text{wurzel}(\text{pbinom}(x,n,pob) - 0.025, pob) = 0.106$

x	95%-Vertrauensbereich		
0	$0\% \le p \le 7{,}1\%$		$g(0) = 0{,}0155 \le 2{,}5\%$
1	$0{,}1\% \le p \le 10{,}6\%$	enthält p = 8%	
2	$0{,}5\% \le p \le 13{,}7\%$	enthält p = 8%	$g(1) + \ldots + g(8) = 0{,}9678 \ge 95\%$
3	$1{,}3\% \le p \le 16{,}5\%$	enthält p = 8%	
4	$2{,}2\% \le p \le 19{,}2\%$	enthält p = 8%	
5	$3{,}3\% \le p \le 21{,}8\%$	enthält p = 8%	
6	$4{,}5\% \le p \le 24{,}3\%$	enthält p = 8%	
7	$5{,}8\% \le p \le 26{,}7\%$	enthält p = 8%	
8	$7{,}2\% \le p \le 29{,}1\%$	enthält p = 8%	
9	$8{,}6\% \le p \le 31{,}4\%$		$g(9) + g(10) + \ldots g(50) = 1\text{-}G(8) =$
10	$10{,}0\% \le p \le 33{,}7\%$		$= 0{,}0167 \le 2{,}5\%$
usw.			

7.4 x = 5 bei n = 60;
95%-Vertrauensbereich: $2{,}8\% \le p \le 18{,}4\%$.
1/6 = 16,7% ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser bei einem fairen Würfel. Da dieser Wert noch im Vertrauensbereich enthalten ist, kann (oder braucht) der Würfel beim gewählten Vertrauensniveau nicht als unfair betrachtet werden.



7.5 x = 7 bei n = 80;
95%-Vertrauensbereich für p:
$3{,}6 \le p \le 17{,}2\%$

Mathcad: $x := 7 \quad n := 80$

Startwert: $pun := \frac{x}{n}$ bzw. $pob := \frac{x}{n}$

wurzel(pbinom(x − 1, n, pun) − 0.975, pun) = 0.036

wurzel(pbinom(x, n, pob) − 0.025, pob) = 0.172

7.6 x = 3 bei n = 70;
99%-Vertrauensbereich für p:
$0{,}5\% \le p \le 14{,}8\%$

Mathcad: $x := 3 \quad n := 70$

wurzel(pbinom(x − 1, n, pun) − 0.995, pun, 0, 1) = 0.005

wurzel(pbinom(x, n, pob) − 0.005, pob, 0, 1) = 0.148

7.7 **a)** x = 4 bei n = 50; $1{,}4\% \le p \le 23{,}1\%$ **b)** x = 4 bei n = 100; $0{,}7\% \le p \le 12{,}1\%$

7.8 $\hat{p} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; x = 46; n = 800; $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{46}{800}$

a) $\hat{p} - 1{,}6449 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + 1{,}6449 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $4{,}4\% \le p \le 7{,}1\%$;

$np_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $np_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$; da $n\cdot p\cdot(1-p)$ mit wachsendem p (bis p = 50%) zunimmt, würde es genügen, die Überprüfung auf Normalverteilung nur für p_{un} vorzunehmen.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $4{,}5\% \le p \le 7{,}3\%$

b) $\hat{p} - 1{,}9600 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + 1{,}9600 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $4{,}1\% \le p \le 7{,}4\%$;

$np_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $np_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $4{,}2\% \le p \le 7{,}6\%$

7.8 c) $\hat{p}-2{,}5758\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+2{,}5758\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $3{,}6\% \le p \le 7{,}9\%$;
$np_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $np_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $3{,}8\% \le p \le 8{,}2\%$

7.9 $\hat{p}-u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $x = 28$; $n = 500$; $\hat{p}=\frac{x}{n}=0{,}056$

a) $\alpha = 95\%$: $\hat{p}-1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $3{,}6\% \le p \le 7{,}6\%$.
$n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $n\cdot p_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $3{,}8\% \le p \le 8{,}0\%$

b) $\alpha = 99\%$: $\hat{p}-2{,}5758\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+2{,}5758\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$ $3{,}0\% \le p \le 8{,}2\%$;
$n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $n\cdot p_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $3{,}3\% \le p \le 8{,}8\%$

7.10 $\hat{p}-u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $x = 24$; $n = 900$; $\hat{p}=\frac{x}{n}=0{,}0267$;
$\hat{p}-1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $1{,}6\% \le p \le 3{,}7\%$;
$n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $n\cdot p_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $1{,}4\% \le p \le 3{,}9\%$

7.11 $x = 33$ bei $n = 500$ bedeutet den Fehleranteil $\hat{p}=\frac{x}{n}=6{,}6\%$ in der Stichprobe.

a) $1-\alpha = 95\%$: $\hat{p}-1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $4{,}4\% \le p \le 8{,}8\%$;
$n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $n\cdot p_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$; da $p = 4{,}0\%$ nicht eingeschlossen ist, spricht dies bei einem Vertrauensniveau von 95% für eine Änderung der Fertigungsqualität

b) $1-\alpha = 95\%$: $\hat{p}-2{,}5758\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+2{,}5758\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $3{,}7\% \le p \le 9{,}5\%$;
$n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $n\cdot p_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$;
da nun $p = 4{,}0\%$ eingeschlossen ist, braucht (oder kann – je nach Standpunkt) bei einem Vertrauensniveau von 99% nicht auf eine Änderung geschlossen werden

7.12 95%-Vertrauensbereich für p: $\hat{p}-1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+1{,}9600\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; $\hat{p} = 0{,}25$:

a) $n = 100$; $16{,}5\% \le p \le 33{,}5\%$ oder $p = 25{,}0\% \pm 8{,}5\%$
$n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $n\cdot p_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $16{,}9\% \le p \le 34{,}7\%$

b) $n = 200$; $19{,}0\% \le p \le 31{,}0\%$ oder $p = 25{,}0\% \pm 6{,}0\%$
$n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $n\cdot p_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $19{,}2\% \le p \le 31{,}6\%$

c) $n = 500$; $21{,}2\% \le p \le 28{,}8\%$ oder $p = 25{,}0\% \pm 3{,}8\%$
$n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ als auch $n\cdot p_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: $21{,}3\% \le p \le 29{,}0\%$

7.13 95%-Vertrauensbereich für p: $\hat{p} - 1{,}9600 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + 1{,}9600 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$; n = 1000

a) $\hat{p}$ = 5%: 3,6% ≤ p ≤ 6,4% oder p = 5% ± 1,4%, $n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ und $np_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: 3,7% ≤ p ≤ 6,5%

b) $\hat{p}$ = 20%: 17,5% ≤ p ≤ 22,5% oder p = 20,0% ± 2,5%, $n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ und $np_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: 17,6% ≤ p ≤ 22,6%

c) $\hat{p}$ = 40%: 37,0% ≤ p ≤ 43,0% oder p = 40,0% ± 3,0%, $n\cdot p_{un}\cdot(1-p_{un}) > 9$ und $np_{ob}\cdot(1-p_{ob}) > 9$.
Zum Vergleich das auf Zehntelprozent genaue Ergebnis: 36,9% ≤ p ≤ 43,1%

7.14 $\frac{1}{2}\cdot L = 1{,}9600 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 2\% = 0{,}02.$

a) $\hat{p} = 30\%:\ 1{,}9600 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\cdot(1-0{,}3)}{n}} = 0{,}02 \ \Rightarrow\ n \approx 2017$

b) $\hat{p} = 10\%:\ 1{,}9600 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1\cdot(1-0{,}9)}{n}} = 0{,}02 \ \Rightarrow\ n \approx 864$

c) $\hat{p} = 50\%:\ 1{,}9600 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5\cdot(1-0{,}5)}{n}} = 0{,}02 \ \Rightarrow\ n \approx 2401$

7.15 $\hat{\mu} = \frac{15}{8} = 1{,}875$ Fehler pro Gerät;

Lösung durch händische Berechnung der Grenzen des Vertrauensbereiches mit Hilfe der Tabelle 3 (Quantile der χ^2-Verteilung): x = 15;

$\mu_{un} = \frac{1}{2}\cdot\chi^2_{30;\,0{,}025} = \frac{1}{2}\cdot 16{,}79 \approx 8{,}40.$

$\mu_{ob} = \frac{1}{2}\cdot\chi^2_{32;\,0{,}975}$; $\chi^2_{32;0{,}975}$ ist nicht in der Tabelle 3 enthalten; man kann jedoch näherungsweise zum Tabellenwert $\chi^2_{30;0{,}975} = 46{,}98$ den Anteil 2/5 der Differenz auf den Tabellenwert $\chi^2_{35;0{,}975} = 53{,}20$, also $\frac{2}{5}\cdot(53{,}20 - 46{,}98) = 2{,}49$ addieren (= lineare Interpolation). Man erhält

$\chi^2_{32;0{,}975} \approx 46{,}98 + 2{,}49 = 49{,}47$ (genau auf Hundertstel: 49,48). $\mu ob \approx 49{,}47/2 \approx 24{,}74$.

$8{,}40 \le \mu_{Stichprobe} \le 24{,}72$ pro Stichprobe zu 8 Geräten; $1{,}05 \le \mu \le 3{,}09$ pro Gerät.

Lösung mittels *Excel/Zielwertsuche*: Als Startwert ist jeweils der x-Wert möglich

B3 ▾ fx =POISSON(B1-1;A3;1)

	A	B	C	D
1	x =	15		
2	µun	G(x-1, µun)	µob	G(x;µob)
3	15	0,465654	15	0,56808958

D3 ▾ fx =POISSON(B1;C3;1)

	A	B	C	D
1	x =	15		
2	µun	G(x-1, µun)	µob	G(x;µob)
3	8,39538785	0,975000	24,7402148	0,02500005

Im Menü *Extras/Optionen* auf der Registerkarte *Berechnung* den Wert *Maximale Änderung* verringern (etwa auf 0,00001). Usw.

Bzw. *Excel* mit Hilfe der χ^2-Verteilung

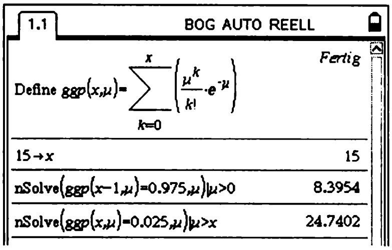
	A	B
1	µun =	8,40
2	µob =	24,74

Formelansicht:

	A	B
1	µun =	=0,5*CHIINV(0,975;30)
2	µob =	=0,5*CHIINV(0,025;32)

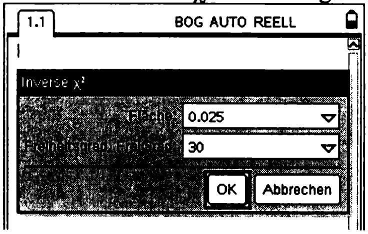
Usw.

Achtung: Bei *Excel* ist die Wahrscheinlichkeit p (siehe Lehrbuch Quantile $\chi_{f;p}$ der χ^2-Verteilung auf Seite 357) nicht der Flächeninhalt *bis* zum Quantil, sondern *über* dem Quantil!



usw.

oder mit Hilfe der χ^2-Verteilung:



usw.

Mathcad: $x := 15$ Startwert: $\mu un := x$ bzw. $\mu ob := x$

$$\mu un := \mathrm{wurzel}(\mathrm{ppois}(x-1,\mu un) - 0.975, \mu un) = 8.395 \qquad \frac{\mu un}{8} = 1.049$$

$$\mu ob := \mathrm{wurzel}(\mathrm{ppois}(x,\mu ob) - 0.025, \mu ob) = 24.74 \qquad \frac{\mu ob}{8} = 3.093$$

Berechnung über die Quantile der χ^2-Verteilung:

$$\mu un := \frac{1}{2}\cdot \mathrm{qchisq}(0.025, 2\cdot x) = 8.395 \quad \frac{\mu un}{8} = 1.049 \qquad \mu ob := \frac{1}{2}\cdot \mathrm{qchisq}[0.975, 2\cdot(x+1)] = 24.74 \quad \frac{\mu ob}{8} = 3.093$$

7.16 **a)** $1-\alpha = 80\%$; $\alpha = 20\%$; $\alpha/2 = 10\%$; $1-\alpha/2 = 90\%$;

$9{,}47 \le \mu_{\text{Stichprobe}} \le 20{,}13$ pro Stichprobe zu 20 Glasplatten; $0{,}47 \le \mu \le 1{,}01$ pro Glasplatte

Mathcad: $\alpha := 0.2$ $x := 14$ Startwert: $\mu un := x$ bzw. $\mu ob := x$

$$\mu un := \mathrm{wurzel}\left[\mathrm{ppois}(x-1,\mu un) - \left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \mu un\right] = 9.47 \qquad \frac{\mu un}{20} = 0.47$$

$$\mu ob := \mathrm{wurzel}\left(\mathrm{ppois}(x,\mu ob) - \frac{\alpha}{2}, \mu ob\right) = 20.13 \qquad \frac{\mu ob}{20} = 1.01$$

b) $1-\alpha = 90\%$; $\alpha = 10\%$; $\alpha/2 = 5\%$; $1-\alpha/2 = 95\%$;

$8{,}46 \le \mu_{\text{Stichprobe}} \le 20{,}89$ pro Stichprobe zu 20 Glasplatten; $0{,}42 \le \mu \le 1{,}09$ pro Glasplatte

Mathcad: Berechnung über die Quantile der χ^2-Verteilung: $x := 14$ $\alpha := 0.1$

$$\mu un := \frac{1}{2}\cdot \mathrm{qchisq}\left(\frac{\alpha}{2}, 2\cdot x\right) = 8.46 \qquad \frac{\mu un}{20} = 0.42$$

$$\mu ob := \frac{1}{2}\cdot \mathrm{qchisq}\left[1-\frac{\alpha}{2}, 2\cdot(x+1)\right] = 21.89 \qquad \frac{\mu ob}{20} = 1.09$$

c) $1-\alpha = 95\%$; $\alpha = 5\%$; $\alpha/2 = 2{,}5\%$; $1-\alpha/2 = 97{,}5\%$;

$7{,}65 \le \mu_{\text{Strichprobe}} \le 23{,}49$ pro Stichprobe zu 20 Glasplatten; $0{,}38 \le \mu \le 1{,}17$ pro Glasplatte

B3 ▾ fx =POISSON(B1-1;A3;1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x =	14	α =	5%			
2	μun	G(x-1, μun)	μob	G(x;μob)		μun pro Glasplatte:	0,38
3	7,65	0,975000	23,49	0,02500007		μob pro Glasplatte:	1,17

d) $1-\alpha = 99\%$; $\alpha = 1\%$; $\alpha/2 = 0{,}5\%$; $1-\alpha/2 = 99{,}5\%$;

$6{,}23 \le \mu_{\text{Stichprobe}} \le 26{,}84$ pro Stichprobe zu 20 Glasplatten; $0{,}31 \le \mu \le 1{,}34$ pro Glasplatte

D1 ▾ fx =0,5*CHIINV(1-B2/2;2*B1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	x =	14	μun =	6,23		μun pro Glasplatte:	0,31
2	α =	1%	μob =	26,84		μob pro Glasplatte:	1,34

7.17 $x = 5+2+...+4 = 43$ Störfälle an 10 Tagen; $\alpha/2 = 0{,}995$; $1-\alpha/2 = 0{,}005$;
$27{,}99 \leq \mu_{\text{Stichprobe}} \leq 62{,}96$ pro Stichprobe zu 10 Tagen; $2{,}80 \leq \mu \leq 6{,}30$ pro Tag

7.18 $x = 8$ Fehler auf 100 Kartons; $\alpha/2 = 0{,}005$; $1-\alpha/2 = 0{,}995$;
$2{,}57 \leq \mu_{\text{Stichprobe}} \leq 18{,}58$ pro Stichprobe zu 100 Kartons; $0{,}0257 \leq \mu \leq 0{,}1858$ pro Karton; dieser Vertrauensbereich enthält den Wert 0,05; daher kann davon ausgegangen werden, dass die Druckqualität gleich geblieben ist.

7.19 $\alpha/2 = 0{,}025$; $1-\alpha/2 = 0{,}995$;
a) $0{,}62 \leq \mu_{\text{Stichprobe}} \leq 8{,}77$ pro Stichprobe zu 10 Laufmetern; $0{,}062 \leq \mu \leq 0{,}877$ pro Laufmeter; 0,1 liegt in diesem Vertrauensbereich liegt, daher bekräftigt das Stichprobenergebnis die Vermutung *nicht*, dass ein Unterschied in der Lieferqualität eingetreten ist.
b) $20{,}24 \leq \mu_{\text{Stichprobe}} \leq 42{,}83$ pro Stichprobe zu 100 Laufmetern; $0{,}202 \leq \mu \leq 0{,}428$ pro Laufmeter; 0,1 liegt nicht in diesem Vertrauensbereich, daher bekräftigt das Ergebnis der nun *größeren* Stichprobe die Vermutung, dass ein Unterschied in der Lieferqualität eingetreten ist.

7.20 $n = 6$, $\bar{x} = 99{,}817\ \text{g}$, $\sigma = 2{,}0\ \text{g}$ bekannt;

(1 - α)- Vertrauensbereich für μ: $\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

95%-Vertrauensbereich für μ: $1 - \alpha/2 = 0{,}975$; $99{,}82 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq 99{,}82 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}}$

oder $98{,}22\ \text{g} \leq \mu \leq 101{,}42\ \text{g}$

99%-Vertrauensbereich für μ: $1 - \alpha/2 = 0{,}995$; $99{,}82 - 2{,}5758 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq 99{,}82 + 2{,}5758 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

oder $97{,}71\ \text{g} \leq \mu \leq 101{,}92\ \text{g}$

7.21 $n = 20$; $\bar{x} = 111{,}0\ \Omega$; $s = 3{,}4\ \Omega$; σ unbekannt;

a) 95% - Vertr.ber. für μ: $\bar{x} - t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ mit $f = n - 1$ und $1-\alpha/2 = 0{,}975$.

Quantile $t_{f;p}$ aus Tabelle 2, Lehrbuch Seite 356, oder rechnergestützt:

$111{,}0 - 2{,}0930 \cdot \frac{3{,}4}{\sqrt{20}} \leq \mu \leq 111{,}0 + 2{,}0930 \cdot \frac{3{,}4}{\sqrt{20}}$ oder $109{,}41\ \Omega \leq \mu \leq 112{,}59\ \Omega$

b) 95% - Vertr.bereich für σ: $s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;1-\alpha/2}}} \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;\alpha/2}}}$ mit $f = n - 1$ und $\alpha/2 = 0{,}025$:

Quantile $\chi^2_{f;p}$ aus Tabelle 3, Lehrbuch Seite 357, oder rechnergestützt;

$3{,}4 \cdot \sqrt{\frac{19}{32{,}85}} \leq \sigma \leq 3{,}4 \cdot \sqrt{\frac{19}{8{,}907}}$ oder $2{,}59\ \Omega \leq \sigma \leq 4{,}97\ \Omega$

Mathcad: $\alpha := 0.05$ $\quad n := 20$ $\quad f := n - 1$

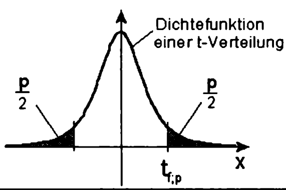
$qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, f\right) = 2.0930$ $\qquad qchisq\left(1 - \frac{\alpha}{2}, f\right) = 32.85$ $\qquad qchisq\left(\frac{\alpha}{2}, f\right) = 8.907$

Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	α=	0,05	f=	19	2,0930	32,85	8,907

	A	B	C	D	E	F	G
1	α=	0,05	f=	19	=TINV(B1;D1)	=CHIINV(B1/2;D1)	=CHIINV(1-B1/2;D1)

Achtung: Bei *Excel* ist die Wahrscheinlichkeit p für das Quantil $t_{f;p}$ aus der nebenstehenden Abbildung ersichtlich.
Beim Quantil $\chi_{f;p}$ ist die Wahrscheinlichkeit p nicht der Flächeninhalt *bis* zum Quantil, sondern *über* dem Quantil!



7.22 $n = 25$; $\bar{x} = 52{,}40\ \mu F$; $s = 2{,}90\ \mu F$; σ unbekannt;

a) $1\text{-}\alpha = 90\%$: $52{,}40 - 1{,}7109 \cdot \frac{2{,}90}{\sqrt{25}} \le \mu \le 52{,}40 + 1{,}7109 \cdot \frac{2{,}90}{\sqrt{25}}$ oder $51{,}41\ \mu F \le \mu \le 53{,}39\ \mu F$;

$2{,}90 \cdot \sqrt{\frac{24}{36{,}42}} \le \sigma \le 2{,}90 \cdot \sqrt{\frac{24}{13{,}85}}$ oder $2{,}35\ \mu F \le \sigma \le 3{,}82\ \mu F$

b) $1\text{-}\alpha = 95\%$: $52{,}40 - 2{,}0639 \cdot \frac{2{,}90}{\sqrt{25}} \le \mu \le 52{,}40 + 2{,}0639 \cdot \frac{2{,}90}{\sqrt{25}}$ oder $51{,}20\ \mu F \le \mu \le 53{,}60\ \mu F$;

$2{,}90 \cdot \sqrt{\frac{24}{39{,}36}} \le \sigma \le 2{,}90 \cdot \sqrt{\frac{24}{12{,}40}}$ oder $2{,}26\ \mu F \le \sigma \le 4{,}03\ \mu F$

c) $1\text{-}\alpha = 99\%$: $52{,}40 - 2{,}7969 \cdot \frac{2{,}90}{\sqrt{25}} \le \mu \le 52{,}40 + 2{,}7969 \cdot \frac{2{,}90}{\sqrt{25}}$ oder $50{,}78\ \mu F \le \mu \le 54{,}02\ \mu F$;

$2{,}90 \cdot \sqrt{\frac{24}{45{,}56}} \le \sigma \le 2{,}90 \cdot \sqrt{\frac{24}{9{,}886}}$ oder $2{,}10\ \mu F \le \sigma \le 4{,}52\ \mu F$

7.23 $n = 15$, $\bar{x} = 9{,}244$ mm, $s = 0{,}0253$ mm; σ unbekannt;

$9{,}244 - 2{,}1448 \cdot \frac{0{,}0253}{\sqrt{15}} \le \mu \le 9{,}244 + 2{,}1448 \cdot \frac{0{,}0253}{\sqrt{15}}$ oder $9{,}230\ \text{mm} \le \mu \le 9{,}258\ \text{mm}$

7.24 $2 \cdot 1{,}960 \cdot 5{,}2/\sqrt{n} = 2 \Rightarrow n \approx 104$ Widerstände

7.25 σ bekannt; $\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$;

a) $1\text{-}\alpha = 90\%$: $98{,}40 - 1{,}6449 \cdot \frac{5{,}80}{\sqrt{36}} \le \mu \le 98{,}40 + 1{,}6449 \cdot \frac{5{,}80}{\sqrt{36}}$ oder $96{,}810\ \Omega \le \mu \le 99{,}990\ \Omega$

b) $1\text{-}\alpha = 95\%$: $98{,}40 - 1{,}9600 \cdot \frac{5{,}80}{\sqrt{36}} \le \mu \le 98{,}40 + 1{,}9600 \cdot \frac{5{,}80}{\sqrt{36}}$ oder $96{,}505\ \Omega \le \mu \le 100{,}295\ \Omega$

c) $1\text{-}\alpha = 99\%$: $98{,}40 - 2{,}5758 \cdot \frac{5{,}80}{\sqrt{36}} \le \mu \le 98{,}40 + 2{,}5758 \cdot \frac{5{,}80}{\sqrt{36}}$ oder $95{,}910\ \Omega \le \mu \le 100{,}890\ \Omega$

d) $2 \cdot 1{,}9600 \cdot 5{,}8/\sqrt{36} = 2 \cdot 2{,}5758 \cdot 5{,}8/\sqrt{n} \Rightarrow n = 62{,}17 \approx 62$ Stück (bei $n = 63$ ist die Aussagegenauigkeit etwas höher, bei $n = 62$ etwas niedriger als gefordert)

7.26 $n = 10$, $\bar{x} = 450{,}91$ g, $s = 0{,}968$ g; $\bar{x} - t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$;

$1\text{-}\alpha = 95\%$: $450{,}91 - 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}968}{\sqrt{10}} \le \mu \le 450{,}91 + 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}968}{\sqrt{10}}$ oder $450{,}22\ \text{g} \le \mu \le 451{,}60\ \text{g}$;

da $\mu_0 = 450$ g nicht in diesem Vertrauensbereich liegt, ist bei $1\text{-}\alpha = 95\%$ eine Änderung von μ zu vermuten.

$1\text{-}\alpha = 99\%$: $450{,}91 - 3{,}2498 \cdot \frac{0{,}968}{\sqrt{10}} \le \mu \le 450{,}91 + 3{,}2498 \cdot \frac{0{,}968}{\sqrt{10}}$ oder $449{,}92\ \text{g} \le \mu \le 451{,}90\ \text{g}$;

$\mu_0 = 450$ g wird von diesem Vertrauensbereich noch eingeschlossen. Das Vertrauensniveau $1\text{-}\alpha = 99\%$ bedeutet eine vorsichtigere Beurteilung als das Vertrauensniveau $1\text{-}\alpha = 95\%$. eine Änderung von μ ist nun nicht ableitbar.

7.27 **a)** σ bekannt; $\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $1 - \alpha = 99\%$;

$100{,}3 - 2{,}5758 \cdot \frac{0{,}35}{\sqrt{50}} \le \mu \le 100{,}3 + 2{,}5758 \cdot \frac{0{,}35}{\sqrt{50}}$ oder $100{,}17\ l \le \mu \le 100{,}43\ l$; dieses Intervall enthält die mittlere Sollmenge μ_0 nicht; es ist daher (besonders angesichts des hohen Vertrauensniveaus) anzunehmen, dass die Sollmenge im Mittel nicht eingehalten wird.

b) Länge = $0{,}2\ l$, $2 \cdot 2{,}5758 \cdot 0{,}35/\sqrt{n} = 0{,}2 \Rightarrow n = 81{,}23$;

bei $n = 81$ Fässern wird die geforderte Länge gerade noch überschritten; daher ist die Antwort: 82 Fässer

7.28 $n = 12$, $s = 6{,}40$ N; $6{,}40 \cdot \sqrt{\frac{11}{26{,}76}} \le \sigma \le 6{,}40 \cdot \sqrt{\frac{11}{2{,}603}}$ oder $4{,}11 \text{ N} \le \sigma \le 13{,}16 \text{ N}$; da dieser Vertrauensbereich den Wert $\sigma = 3{,}8$ N nicht enthält, ist die Herstellerangabe unglaubwürdig (besonders deswegen, weil das Vertrauensniveau $1\text{-}\alpha = 99\%$ hoch bzw. die Irrtumswahrscheinlichkeit α klein angenommen ist)

7.29 $n = 6$; $s = 0{,}0543$ mm; $s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;1-\alpha/2}}} \le \sigma \le s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi^2_{f;\alpha/2}}}$

$1\text{-}\alpha = 95\%$: $0{,}0543 \cdot \sqrt{\frac{5}{12{,}83}} \le \sigma \le 0{,}0543 \cdot \sqrt{\frac{5}{0{,}8312}}$ oder $0{,}0339 \text{ mm} \le \sigma \le 0{,}1331$ mm; da dieser Vertrauensbereich den Wert $\sigma_0 = 0{,}032$ mm nicht enthält, ist bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% eine Änderung von σ zu begründen

$1\text{-}\alpha = 99\%$: $0{,}0543 \cdot \sqrt{\frac{5}{16{,}75}} \le \sigma \le 0{,}0543 \cdot \sqrt{\frac{5}{0{,}4117}}$ oder $0{,}0297 \text{ mm} \le \sigma \le 0{,}1892$ mm; da dieser Vertrauensbereich den Wert $\sigma_0 = 0{,}032$ mm noch enthält, ist nun eine Änderung von σ bei der kleineren Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% nicht zu begründen

7.30 $n = 11$, $\bar{x} = 46{,}95$ V, $s = 1{,}36$ V; σ unbekannt; $\bar{x} - t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

mit $1 - \alpha = 95\%$; $46{,}95 - 2{,}2281 \cdot \frac{1{,}36}{\sqrt{11}} \le \mu \le 46{,}95 + 2{,}2281 \cdot \frac{1{,}36}{\sqrt{11}}$ oder $46{,}036 \text{ V} \le \mu \le 47{,}864$

oder auch $U = 46{,}95 \text{ V} \pm 0{,}91$ V

7.31 $n = 10$, $\bar{x} = 2{,}30$ g, $s = 0{,}0333$ g; σ unbekannt; $\bar{x} - t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

mit $1 - \alpha = 95\%$; $2{,}30 - 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}0333}{\sqrt{10}} \le \mu \le 46{,}95 + 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}0333}{\sqrt{10}}$ oder $2{,}276 \text{ g} \le \mu \le 2{,}324$ g

oder auch $m = (2{,}300 \pm 0{,}024)$ g

7.32 **a)** (1) u-Test zweiseitig, $\alpha = 1\%$:

H_0: $\mu = \mu_0 = 100\ \Omega$ gegen H_1: $\mu \ne \mu_0$;

$u_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{101{,}6-100}{2/\sqrt{12}} = 2{,}771$; kritischer Wert: $u_{0{,}995} = 2{,}576$;

da $|u_{\text{prüf}}| > u_{0{,}995}$, ist die H_0-Hypothese zugunsten der H_1-Hypothese zu verwerfen, die Abweichung $\bar{x}$ von μ_0 steht in einem signifikanten Gegensatz zur H_0-Hypothese, eine Änderung von μ wird (wegen nur $\alpha = 1\%$ deutlich) angezeigt.

(2) 99%-Vertrauensbereich für μ bei bekanntem σ: $\bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} - u_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$;

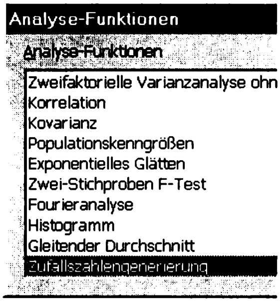
$101{,}6 - 2{,}576 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}} \le \mu \le 101{,}6 + 2{,}576 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}}$ oder $100{,}11\ \Omega \le \mu \le 103{,}09\ \Omega$;

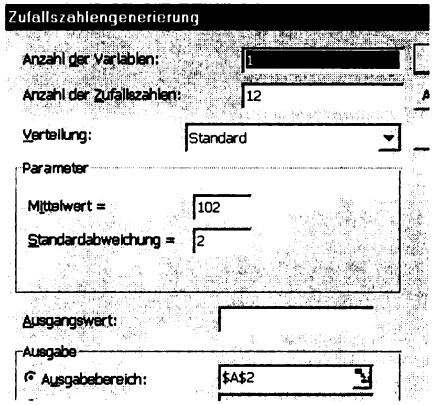
da $\mu_0 = 100\ \Omega$ nicht mehr von diesem Vertrauensbereich eingeschlossen wird, ist eine Änderung von μ anzunehmen

b) $u_{1-P/2} = |u_{\text{prüf}}| = \frac{101{,}6-100}{2/\sqrt{12}} = 2{,}771 \Rightarrow 1 - P/2 = G(2{,}771) = 0{,}9972$; daraus $P = 0{,}56\%$.

$P < \alpha$, daher ist H_0 zu verwerfen. P ist die Wahrscheinlichkeit, mit der man sich irrt, wenn man H_0 auf Grund der vorliegenden Stichprobe ablehnt und damit die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit. (α ist die *maximal* zugestandene Irrtumswahrscheinlichkeit).

7.33 Simulation mit *Excel*: Menü *Extras/Analyse-Funktionen* (wenn letztere nicht vorhanden, mit dem *Add-in-Manager* einfügen).





	A	B	C
1	Stichprobe		
2	101,4		
3	99,4	n :	12
4	102,5	Mittelwert:	101,7
5	104,6		
6	104,4	Prüfwert:	2,911
7	105,5	Krit.Wert:	2,576
8	97,6		
9	101,5		
10	104,2		
11	99,8		
12	100,6		
13	98,6		

	A	B	C
1	Stichprobe		
2	101,399535681732		
3	99,4446336636902	n :	=ANZAHL(A2:A13)
4	102,488514615427	Mittelwert:	=MITTELWERT(A2:A13)
5	104,552947080403		
6	104,396700438112	Prüfwert:	=(C4-100)/2*WURZEL(C3)
7	105,466266207396	Krit.Wert:	=NORMINV(0,995;0;1)
8	97,6328247208148		

Simulation mit Mathcad, Neuberechnung durch Strg+F9

Startindex auf 1 gesetzt (Menü *Extras/Arbeitsblattoptionen, Systemvariablen*)

$n := 12 \qquad \mu_0 := 100$

$\sigma := 2 \qquad \mu := 102 \qquad \alpha := 0.01$

$x := \mathrm{rnorm}(n, \mu, \sigma) =$

	1
1	103.5
2	102.6
3	102.0
4	100.5
5	101.2
6	100.7
7	101.7
8	104.0
9	102.4
10	103.0
11	103.5
12	102.0

$m := \mathrm{mittelwert}(x) \qquad m = 102.26$

$$\mathrm{Prüfwert} := \frac{m - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} = 3.91$$

$$\mathrm{KritischerWert} := \mathrm{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) = 2.576$$

wenn(|Prüfwert| ≤ KritischerWert, "Annehmen" , "Verwerfen") = "Verwerfen"

7.34 **a)** u-Test zweiseitig, $\alpha = 5\%$: H_0: $\mu = \mu_0 = 83{,}0$ µm gegen H_1: $\mu \neq 83{,}0$ µm;

Prüfwert $u_{prüf} = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{81{,}9-83{,}0}{5/\sqrt{10}} = -0{,}696$; kritischer Wert: $u_{0,975} = 1{,}960$;

da $|u_{prüf}| \leq u_{0,975}$, kann die H_0-Hypothese nicht verworfen werden, eine Änderung der mittleren Schichtstärke ist nicht ableitbar

b) 95% - Vertrauensbereich für μ bei bekanntem σ:

$81{,}9 - 1{,}960 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 81{,}9 + 1{,}960 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{10}}$ oder $78{,}80$ µm $\leq \mu \lesssim 85{,}00$ µm;

da $\mu_0 = 83{,}0$ µm von diesem Vertrauensbereich eingeschlossen wird, weist dies nicht auf eine Änderung der mittleren Schichtstärke μ hin

7.35 u – Test einseitig nach oben (H_1-Hypothese als Vermutung, dass der mittlere Schadstoffausstoß *über* μ_0 liegt), $\alpha = 5\%$:

H_0: $\mu \leq \mu_0 = 204$ mg gegen H_1: $\mu > 204$ mg;

Prüfwert $u_{prüf} = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{210-204}{12/\sqrt{10}} = 1{,}581$; $u_{prüf}$ darf nicht zu groß sein;

kritischer Wert: $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1{,}645$; da $u_{prüf} \leq 1{,}645$, kann die H_0-Hypothese nicht verworfen werden, der Stichprobenbefund kann bei $\mu = 204$ mg noch als zufallsbedingt gedeutet werden; der Verdacht auf eine Erhöhung des Schadstoffausstoßes wird also nicht gestützt.

P-Wert des Testes: $u_{1-P} = u_{prüf} = 1{,}581 \Rightarrow 1 - P = G(1{,}581) = 0{,}9431$ oder $P = 5{,}69\%$

7.36 u – Test zweiseitig, $\alpha = 1\%$:

H_0: $\mu = \mu_0 = 81{,}042$ mm gegen H_1: $\mu \neq 81{,}042$ mm;

Prüfwert $u_{prüf} = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{81{,}041-81{,}042}{0{,}001/\sqrt{14}} = -3{,}742$; kritischer Wert: $u_{0,995} = 2{,}576$;

da $|u_{prüf}| > u_{0,995}$, ist die H_0-Hypothese zugunsten der H_1-Hypothese zu verwerfen, eine Änderung von μ wird signifikant angezeigt.

Ergänzend: P-Wert des Testes: $u_{1-P/2} = |u_{prüf}| = 3{,}742 \Rightarrow 1 - P/2 = G(3{,}742) = 0{,}9999$ oder $P = 0{,}02\%$

7.37 u – Test einseitig nach unten (Vermutung als H_1-Hypothese, dass die mittlere Abfüllmenge μ *unter* 750,0 ml liegt), $\alpha = 1\%$:

H_0: $\mu \geq \mu_0 = 750{,}0$ ml gegen H_1: $\mu < 750{,}0$ ml;

a) Prüfwert $u_{prüf} = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{748{,}8-750}{2/\sqrt{12}} = -2{,}078$; $u_{prüf}$ darf nicht zu klein sein;

kritischer Wert: $u_\alpha = -u_{1-\alpha} = -2{,}326$; da $u_{prüf} \geq -2{,}326$, kann die H_0-Hypothese bei $\alpha = 1\%$ nicht verworfen werden, der Verdacht wird nicht bestätigt.

P-Wert des Testes $u_{1-P} = |u_{prüf}| = 2{,}078 \Rightarrow 1 - P = G(2{,}078) = 0{,}9812$ oder $P = 1{,}88\%$

b) Prüfwert $u_{prüf} = \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{748{,}8-750}{2/\sqrt{20}} = -2{,}683$; kritischer Wert: $u_\alpha = -u_{1-\alpha} = -2{,}326$;

da nun $u_{prüf} < -2{,}326$, ist die H_0-Hypothese zugunsten von H_1 zu verwerfen; der Stichprobenbefund steht nun bei größeren Stichprobenumfang $n = 20$ in signifikantem Gegensatz zu $\mu = 750$ ml; der Verdacht wird bestätigt.

Ergänzend: P-Wert des Testes $u_{1-P} = |u_{prüf}| = 2{,}683 \Rightarrow 1 - P = G(2{,}078) = 0{,}9964$ oder $P = 0{,}36\%$

7.38 u – Test zweiseitig, $\alpha = 1\%$: H_0: $\mu = \mu_0 = 20{,}00$ mm gegen H_1: $\mu \neq 20{,}00$ mm;

a) $n = 5$; $\bar{x} = 20{,}016$ mm; Prüfwert $u_{prüf} = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{20{,}016-20}{0{,}1/\sqrt{5}} = 0{,}358$;

kritischer Wert: $u_{0,995} = 2{,}576$; da $|u_{prüf}| \leq u_{0,995}$, wird die H_0-Hypothese nicht verworfen, d.h. kein Eingriff

b) $n = 5$; $\bar{x} = 20{,}122$ mm; Prüfwert $u_{prüf} = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{20{,}122-20}{0{,}1/\sqrt{5}} = 2{,}728$;

kritischer Wert: $u_{0,995} = 2{,}576$; da $|u_{prüf}| > u_{0,995}$, wird die H_0-Hypothese verworfen, d.h. Eingriff

7.39 Einstichproben-t-Test zweiseitig, $\alpha = 5\%$;
H_0: $\mu = \mu_0 = 450$ g gegen H_1: $\mu \neq 450$ g; $n = 10$, $\bar{x} = 450{,}91$ g, $s = 0{,}968$ g;

Prüfwert $t_{prüf} = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{450{,}91-450}{0{,}968/\sqrt{10}} = 2{,}974$; kritischer Wert: $t_{f;1-\alpha/2} = t_{9;\,0,975} = 2{,}262$;

da $|t_{prüf}| > t_{9;\,0,975}$, wird die H_0-Hypothese bei $\alpha = 5\%$ verworfen, eine Änderung von μ kann auf diesem Signifikanzniveau nicht ausgeschlossen werden.
Ergänzend: P-Wert des Testes (Mathcad, Excel, ...):
$t_{f,\,1-P/2} = |t_{prüf}| = 2{,}974 \Rightarrow 1 - P/2 =$ Verteilungsfunktion G(2,974) der t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden $= 0{,}9922$ oder $P = 1{,}56\%$

7.40 **a)** Einstichproben-t-Test zweiseitig, $\alpha = 1\%$;
H_0: $\mu = \mu_0 = 1000$ g gegen H_1: $\mu \neq 1000$ g;

Prüfwert $t_{prüf} = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{1004{,}3-1000}{8{,}8/\sqrt{25}} = 2{,}443$; kritischer Wert: $t_{f;1-\alpha/2} = t_{24;\,0,995} = 2{,}797$;

da $|t_{prüf}| \leq t_{24;\,0,995}$, wird H_0 beim gewählten Signifikanzniveau 1% nicht verworfen, der Stichprobenbefund spricht nicht für eine Abweichung des Mittelwertes vom Sollwert

b) 99%-Vertrauensbereich für μ, σ unbekannt:

$$\bar{x} - t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} - t_{f;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}; \quad t_{24;\,0,995} = 2{,}797;$$

$999{,}4 \text{ g} \leq \mu \leq 1009{,}2$ g; der Vertrauensbereich enthält noch den Wert $\mu = 1000$ g, eine Abweichung ist beim gewählten hohen Vertrauensniveau $1 - \alpha = 99\%$ noch nicht anzunehmen.

Anmerkung: Hätte man $\alpha = 5\%$ bzw. $1 - \alpha = 95\%$ vorgegeben, so ist $t_{24;\,0,975} = 2{,}064$; der Stichprobenbefund wäre bei dieser Vorgabe als nicht mehr zufällig bei H_0: $\mu = \mu_0 = 1000$ g anzusehen, eine Abweichung μ von $\mu_0 = 1000$ g wäre nun anzunehmen.

7.41 Einstichproben-t-Test einseitig (H_1-Hypothese als Vermutung, dass die mittlere Reissfestigkeit μ *größer* als 59,8 N ist), $\alpha = 5\%$;
H_0: $\mu = \mu_0 = 59{,}8$ N gegen H_1: $\mu \neq 59{,}8$ N;

Prüfwert $t_{prüf} = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{61{,}5-59{,}8}{6{,}8/\sqrt{80}} = 2{,}236$; kritischer Wert: $t_{f;1-\alpha} = t_{79;\,0,95} = 1{,}664$;

da $t_{prüf} > t_{79;\,0,95}$, wird die H_0-Hypothese verworfen, der Stichprobenbefund bestätigt beim Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ die Erwartung.

Anmerkung: Wäre $\alpha = 1\%$ vorgegeben, so ist der kritische Wert $t_{79;\,0,99} = 2{,}374$; da $t_{prüf} \leq 2{,}374$, könnte bei dieser kleinen Irrtumswahrscheinlichkeit H_0 nicht verworfen werden.

7.42 Einstichproben-t-Test zweiseitig, $\alpha = 5\%$; H_0: $\mu = \mu = \mu_0 = 0$ % gegen H_1: $\mu \neq 0\%$;
$n = 10$, $\bar{x} = 0{,}42\%$, $s = 0{,}551\%$

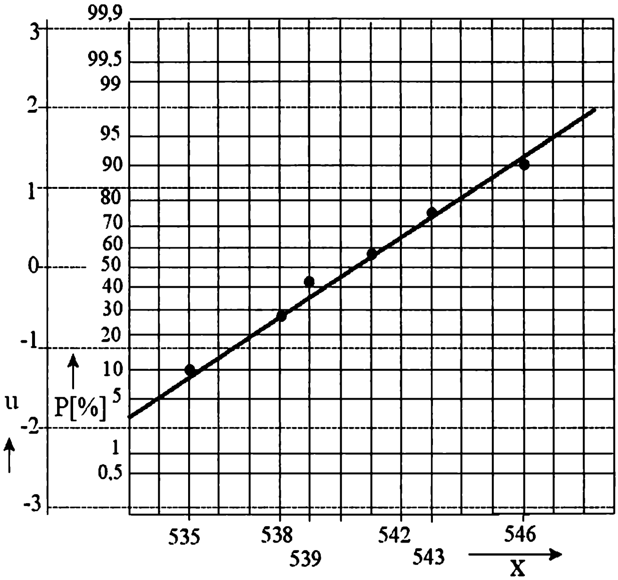
Prüfwert $t_{prüf} = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}42-0}{0{,}551/\sqrt{10}} = 2{,}409$; kritischer Wert: $t_{f;1-\alpha/2} = t_{9;\,0,975} = 2{,}262$;

da $|t_{prüf}| > t_{9;\,0,975}$, wird die H_0-Hypothese verworfen, der Stichprobenbefund spricht beim Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ dafür, dass der Mittelwert der Differenz "alt-neu" ungleich null ist. D.h. die beiden Verfahren werden als nicht gleichwertig eingestuft.

Anmerkung: Bei $\alpha = 1\%$ ist $t_{prüf} \leq t_{9;\,0,995} = 3{,}250$. H_0 könnte nicht verworfen werden.

7.43 Werte aufsteigend sortieren; $H(x_i) = \frac{i - 3/8}{6{,}25}$;

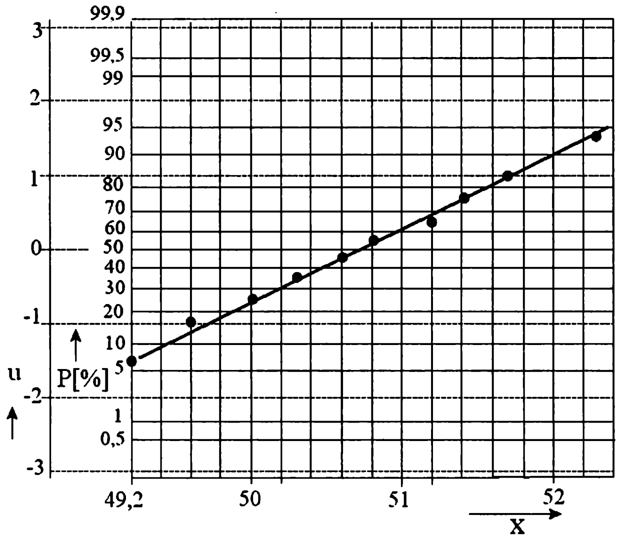
x_i	$H(x_i)$ in %
0,535	10,0
0,538	26,0
0,539	42,0
0,542	58,0
0,543	74,0
0,546	90,0



Die Abweichungen der Punkte von der Geraden erscheinen zufällig, daher kann die Annahme einer Normalverteilung beibehalten werden

7.44 Werte aufsteigend sortieren; $H(x_i) = \frac{i - 3/8}{10{,}25}$

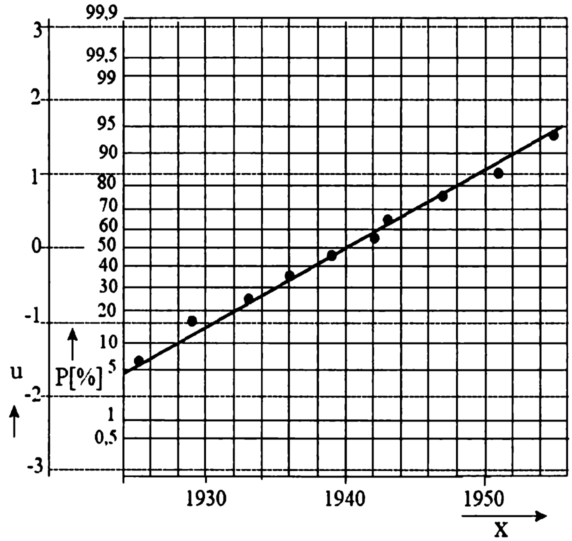
x_i	$H(x_i)$ in %
49,2	6,1
49,6	15,9
50,0	25,6
50,3	35,4
50,6	45,1
50,8	54,9
51,2	64,6
51,4	74,4
51,7	84,1
52,3	93,9



Abweichungen der Punkte von der Geraden erscheinen zufällig, daher kann die Annahme einer Normalverteilung beibehalten werden.

7.45 Werte aufsteigend sortieren; $H(x_i) = \frac{i-3/8}{10{,}25}$.

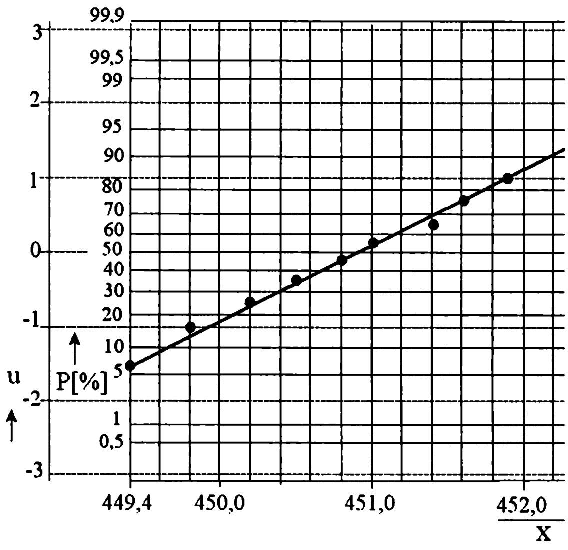
x_i	$H(x_i)$ in %
1925	6,1
1929	15,9
1933	25,6
1936	35,4
1939	45,1
1942	54,9
1943	64,6
1947	74,4
1951	84,1
1955	93,9



Die Abweichungen der Punkte von der Geraden erscheinen zufällig, die Schwingungsdauer kann daher als normalverteilt betrachtet werden

7.46 Werte aufsteigend sortieren; $H(x_i) = \frac{i-3/8}{10{,}25}$

x_i	$H(x_i)$ in %
449,4	6,1
449,8	15,9
450,2	25,6
450,5	35,4
450,8	45,1
451,0	54,9
451,4	64,6
451,6	74,4
451,9	84,1
452,5	93,9



Abweichungen der Punkte von der Geraden erscheinen zufällig, daher wird die Normalverteilungsannahme für die Abfüllmenge durch die Stichprobe gestützt

7.47 Prüfung auf Normalverteilung im Wahrscheinlichkeitsnetz bei 10 Stichprobenwerten
Mathcad - Simulation, Neuberechnung durch Strg F9

$\mu := 450 \qquad \sigma := 1$

Ermitteln von 10 Zufallszahlen, normalverteilt mit μ und σ; die danach aufsteigend sortiert werden:

$\mathbf{z} := \mathrm{rnorm}(10, 450, 1) \qquad \mathbf{x} := \mathrm{sort}(\mathbf{z})$

z =

	1
1	449.3
2	449.5
3	450.6
4	449.8
5	450.1
6	451.3
7	449.3
8	450.0
9	451.1
10	450.9

x =

	1
1	449.3
2	449.3
3	449.5
4	449.8
5	450.0
6	450.1
7	450.6
8	450.9
9	451.1
10	451.3

$$\mathbf{H} := \text{for } i \in 1..10 \qquad H_i \leftarrow \frac{i - \frac{3}{8}}{10 + \frac{1}{4}}$$

H =

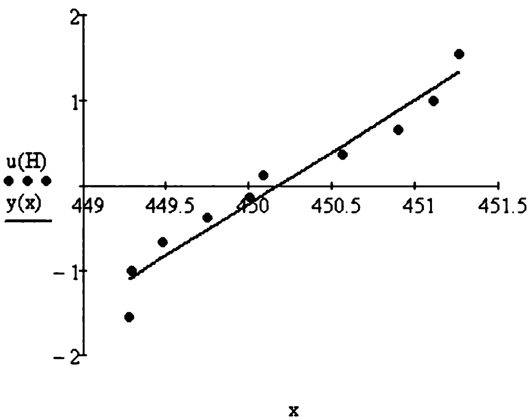
	1
1	0.061
2	0.159
3	0.256
4	0.354
5	0.451
6	0.549
7	0.646
8	0.744
9	0.841
10	0.939

Die H-Werte können nun über den jeweiligen x-Werten in einem vorliegenden Wahrscheinlichkeitsnetz aufgetragen werden.
Im Folgenden werden jedoch die H-Werte in u-Werte umgerechnet. Diese werden anschließend in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufgetragen, das dadurch zu einem Wahrscheinlichkeitsnetz für die H-Werte wird.

$\mathbf{u(p)} := \mathrm{qnorm}(\mathbf{p}, 0, 1) \qquad \mathbf{u(H)} =$

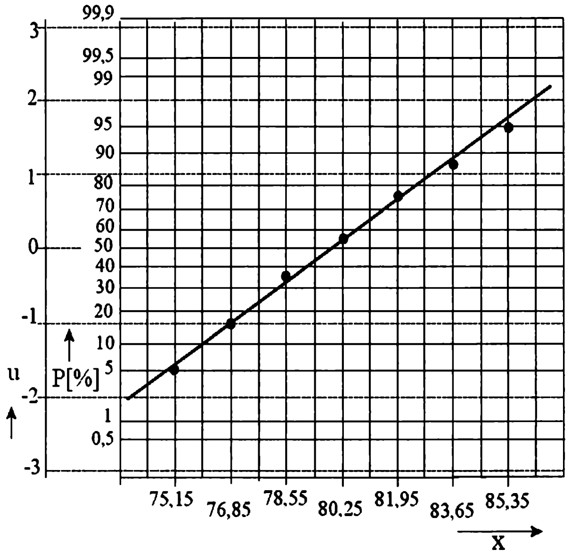
	1
1	-1.546
2	-0.999
3	-0.656
4	-0.375
5	-0.123
6	0.123
7	0.375
8	0.656
9	0.999
10	1.546

Regressionsgerade: $\mathbf{d} := \mathrm{achsenabschn}(\mathbf{x}, \mathbf{u(H)}) \qquad \mathbf{k} := \mathrm{neigung}(\mathbf{x}, \mathbf{u(H)}) \qquad \mathbf{y(x)} := \mathbf{k \cdot x + d}$



7.48 a)

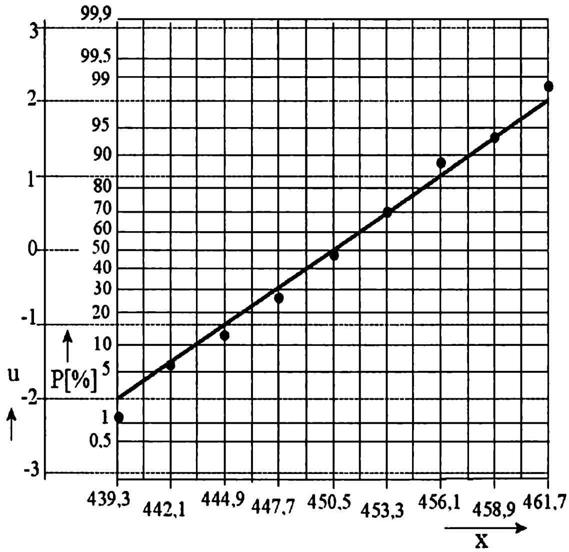
Klasse	n_j	K_j	H_j in %
73,45...75,15	3	3	5
75,15...76,85	7	10	16,7
76,85...78,55	11	21	35
78,55...80,25	12	33	55
80,25...81,95	12	45	75
81,95...83,65	7	52	86,7
83,65...85,35	5	57	95
83,35...87,05	3	60	100



Abweichungen der Punkte von der Geraden erscheinen zufällig, daher wird die Normalverteilungsannahme durch die Stichprobe bekräftigt

b)

Klasse	n_j	K_j	H_j in %
436,5...439,3	1	1	1,25
439,3...442,1	4	5	6,25
442,1...444,9	6	11	13,75
444,9...447,7	11	22	27,50
447,7...450,5	17	39	48,75
450,5...453,3	17	56	70,00
453,3...456,1	15	71	88,75
456,1...458,9	4	75	93,75
458,9...461,7	4	79	98,75
461,7...465,5	1	80	100



Abweichungen der Punkte von der Geraden erscheinen zufällig, daher wird die Normalverteilungsannahme durch die Stichprobe bekräftigt

7.49 **F-Test: Mathcad Simulation, Neuberechnung durch Strg+F9** $\alpha := 0.05$

Stichprobe A aus Normalverteilung mit $\mu_1 := 50$ $\sigma_1 := 1$ $n_1 := 12$

Stichprobe B aus Normalverteilung mit $\mu_2 := 50$ $\sigma_2 := 2$ $n_2 := 12$

Die Stichprobenumfänge könnten ungleich sein.

$A := \mathrm{rnorm}(n_1, \mu_1, \sigma_1)$ $B := \mathrm{rnorm}(n_2, \mu_2, \sigma_2)$

A =

	1
1	49.6
2	49.3
3	49.5
4	49.0
5	48.3
6	50.0
7	49.9
8	50.6
9	52.2
10	50.8
11	51.0
12	50.9

B =

	1
1	51.8
2	51.3
3	47.9
4	50.1
5	48.5
6	51.4
7	49.6
8	48.7
9	48.6
10	49.0
11	51.1
12	49.5

$s_1 := \mathrm{Stdev}(A) = 1.045$

$s_2 := \mathrm{Stdev}(B) = 1.339$

Prüfwert: Die größere Stichprobenvarianz steht im Zähler des Prüfwertes.

$$q := \frac{s_1^{\,2}}{s_2^{\,2}} \qquad F_{\text{prüf}} := \mathrm{wenn}\left(s_1^{\,2} > s_2^{\,2}, q, \frac{1}{q}\right) = 1.641$$

Testwert: $f_1 := \mathrm{wenn}\left(s_1^{\,2} > s_2^{\,2}, n_1 - 1, n_2 - 1\right)$ $f_1 = 11$

$f_2 := \mathrm{wenn}\left(s_1^{\,2} > s_2^{\,2}, n_2 - 1, n_1 - 1\right)$ $f_2 = 11$

$F := \mathrm{qF}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, f_1, f_2\right)$ $F = 3.474$

Entscheidung:

wenn($F_{\text{prüf}} \le F$,"Varianzen gleich" ,"Varianzen ungleich") = "Varianzen gleich"

7.50 F-Test zweiseitig, $\alpha = 5\%$; Prüfwert $F_{\text{prüf}} = \dfrac{0{,}43^2}{0{,}30^2} = 2{,}05$ (größere Stichprobenvarianz im Zähler!),

kritischer Wert: $F_{24,24;0,975} = 2{,}27$; da $F_{\text{prüf}} \le 2{,}27$, braucht kein Unterschied in der Gleichmäßigkeit der Festigkeit angenommen werden

7.51 F-Test zweiseitig, $\alpha = 5\%$;

Prüfwert $F_{\text{prüf}} = \dfrac{0{,}153^2}{0{,}093^2} = 2{,}71$ (größere Stichprobenvarianz im Zähler!)

a) $n = 15$, kritischer Wert: $F_{14,14;0,975} = 2{,}98$; da $F_{\text{prüf}} \le 2{,}98$, braucht kein Unterschied in der Gleichmäßigkeit der Durchmesser abgeleitet werden

b) $n = 25$, kritischer Wert: $F_{24,24;0,975} = 2{,}27$; da $F_{\text{prüf}} > 2{,}27$, ist nun beim größeren Stichprobenumfang der Unterschied in den Stichprobenvarianzen bereits (schwach) signifikant; ein Unterschied in der Gleichmäßigkeit der Durchmesser kann daher begründet werden

7.52 Da $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ vorgegeben ist, braucht nicht durch den F-Test auf Gleichheit der Standardabweichungen getestet werden. Die beiden Stichproben werden im Folgenden mit Hilfe von *Excel, Extras/Analyse-Funktionen/Zufallszahlengenerierung* erzeugt. Dies erfolgt zweimal.
Zu beachten ist, dass das p-Quantil $t_{f;p}$ der t-Verteilung, in *Excel* durch TINV berechenbar, sich zweiseitig versteht und dementsprechend als Wahrscheinlichkeit das Signifikanzniveau α verlangt.

7.52 Fortsetzung

Zufallszahlengenerierung

Anzahl der Variablen:	1
Anzahl der Zufallszahlen:	12
Verteilung:	Standard
Parameter	
Mittelwert =	50
Standardabweichung =	1
Ausgangswert:	
Ausgabe	
Ausgabebereich:	A5

Zufallszahlengenerierung

Anzahl der Variablen:	1
Anzahl der Zufallszahlen:	12
Verteilung:	Standard
Parameter	
Mittelwert =	51
Standardabweichung =	1
Ausgangswert:	
Ausgabe	
Ausgabebereich:	B5

E13 =TINV(C2;2*E5-2)

	A	B	C	D	E
1	**Zweiseitiger Zweistichproben-t-Test für unabhängige Stichproben**				
2	Signifikanzniveau 1-α =	5%			
3					
4	Stichprobe A	Stichprobe B			
5	48,95	52,52		n_A =	12
6	49,08	51,49		n_B =	12
7	50,10	51,41		$xquer_A$ =	49,825
8	48,96	53,16		$xquer_B$ =	50,820
9	50,20	48,85		s_A =	0,932
10	48,04	50,33		s_B =	1,248
11	49,90	49,08		s_d =	0,450
12	49,66	50,64		$t_{prüf}$ =	-2,213
13	51,06	51,12		Krit.Wert =	2,074
14	50,56	50,74			
15	51,17	50,28		Entscheidung:	H0 verwerfen
16	50,23	50,20			

E15 =WENN(ABS(E12)>E13;"H0 verwerfen";"H0 beibehalten")

	A	B	C	D	E
1	**Zweiseitiger Zweistichproben-t-Test für unabhängige Stichproben**				
2	Signifikanzniveau 1-α =		0,05		
3					
4	Stichprobe A	Stichprobe B			
5	48,9515754350577	52,5223031368805		n_A =	=ANZAHL(A5:A16)
6	49,0791479831387	51,4931507646688		n_B =	=ANZAHL(B5:B16)
7	50,0990360149444	51,4121943675273		$xquer_A$ =	=MITTELWERT(A5:A16)
8	48,9568618730118	53,1648884285241		$xquer_B$ =	=MITTELWERT(B5:B16)
9	50,1969101504073	48,8530831867828		s_A =	=STABW(A5:A16)
10	48,0357461026869	50,3266862929886		s_B =	=STABW(B5:B16)
11	49,9041926912469	49,0844404490198		s_d =	=WURZEL(1/E5*(E9^2+E10^2))
12	49,6612041286426	50,642917600795		$t_{prüf}$ =	=(E7-E8)/E11
13	51,0609664968797	51,1178113961942		Krit.Wert =	=TINV(C2;2*E5-2)
14	50,5569927452597	50,7362272097234			
15	51,165888079413	50,2831453710096		Entscheidung:	=WENN(ABS(E12)>E13;"H0 verwe
16	50,2318233782717	50,1996992321219			

7.53 Lieferant A: $n_A = 10$, $\bar{x}_A = 98{,}4$ N, $s_A = 4{,}27$ N
Lieferant B: $n_B = 10$, $\bar{x}_B = 94{,}0$ N, $s_B = 3{,}71$ N
Zweiseitiger F-Test zuvor, um Gleichheit der Standardabweichungen σ_A, σ_B der beiden Normalverteilungen annehmen zu können, $\alpha = 5\%$: Prüfwert $F_{\text{prüf}} = 4{,}27^2/3{,}71^2 = 1{,}33$;
kritischer Wert: $F_{9,9;0,975} = 4{,}03$; $F_{\text{prüf}} \le 4{,}03$, daher $\sigma_A = \sigma_B$ annehmbar.
Zweiseitiger t-Test für unabhängige Stichproben, $\alpha = 5\%$:
$s_d = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(s_A^2 + s_B^2\right)} = 1{,}79$; Prüfwert $t_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_d} = 2{,}46$; kritischer Wert: $t_{18;0,975} = 2{,}10$;
da $|t_{\text{prüf}}| > 2{,}10$, können die beiden Lieferanten bei $\alpha = 5\%$ hinsichtlich der mittleren Reisslasten nicht als gleichwertig betrachtet werden

7.54 $n_1 = 15$, $\bar{x}_1 = 12{,}48$ mm, $s_1 = 0{,}031$ mm; $n_2 = 15$, $\bar{x}_2 = 12{,}52$ mm, $s_2 = 0{,}043$ mm;
Zweiseitiger F-Test zuvor, um Gleichheit der Standardabweichungen σ_1, σ_2 der beiden Normalverteilungen annehmen zu können; dabei genügt der Test auf dem Niveau $\alpha = 5\%$ (für $\alpha = 1\%$ gibt es im Kehrbuch keine Tabelle), da bei einem Signifikanztest die Annahme von H_0 bei $\alpha = 5\%$ die Annahme bei dem gegenüber H_0 „vorsichtigeren" Niveau $\alpha = 1\%$ nach sich zieht. Prüfwert $F_{\text{prüf}} = \frac{0{,}043^2}{0{,}031^2} = 1{,}92$ (größere Stichprobenvarianz im Zähler!);
kritischer Wert: $F_{14,14;0,975} = 2{,}98$; $F_{\text{prüf}} \le 2{,}98$, daher ist die Gleichheit der Standardabweichungen σ_1 und σ_2 annehmbar. Dies gilt nach dem Gesagten beim Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$.
Zweiseitiger t-Test für unabhängige Stichproben, $\alpha = 1\%$:
$s_d = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left(s_A^2 + s_B^2\right)} = 0{,}0137$ mm, Prüfwert $t_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_d} = -2{,}92$.
Kritischer Wert: Der Tabellenwert für $t_{28;0,995}$ liegt nicht in Tabelle 2 vor; aus $t_{25;0,995} = 2{,}787$ und $t_{30;0,995} = 2{,}750$ ergibt sich durch lineare Interpolation
$t_{28;0,995} \approx 2{,}787 + (28-25)/(30-25)\cdot(2{,}750 - 2{,}787) = 2{,}765$;
da $|t_{\text{prüf}}| > 2{,}049$, können die beiden Maschinen bei $\alpha = 1\%$ hinsichtlich der mittleren Bolzendurchmesser nicht als gleichwertig betrachtet werden.

7.55 **a) Prüfung auf Normalverteilung der Stichproben A und B im Wahrscheinlichkeitsnetz:**

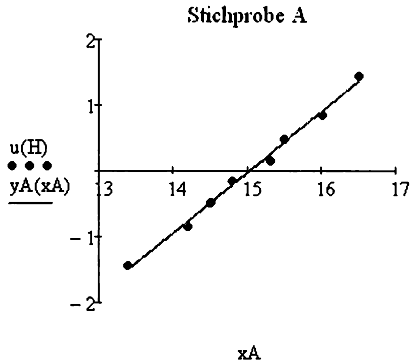
$$\text{Stichprobe } A := \begin{pmatrix} 14.5 \\ 13.4 \\ 15.5 \\ 14.2 \\ 16.5 \\ 14.8 \\ 15.3 \\ 16.0 \end{pmatrix} \quad xA := \text{sort}(A) \qquad \text{Stichprobe } B := \begin{pmatrix} 15.2 \\ 12.3 \\ 14.0 \\ 13.5 \\ 14.1 \\ 16.1 \\ 14.8 \\ 13.2 \end{pmatrix} \quad xB := \text{sort}(B)$$

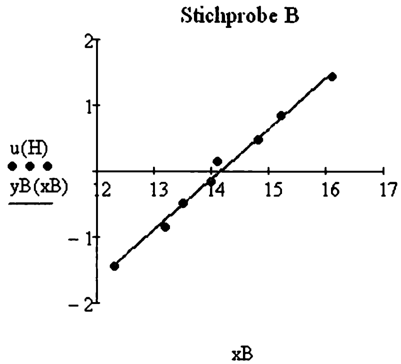
$$H := \text{for } i \in 1..8 \quad H_i \leftarrow \frac{i - \frac{3}{8}}{8 + \frac{1}{4}} \qquad H = \begin{pmatrix} 0.076 \\ 0.197 \\ 0.318 \\ 0.439 \\ 0.561 \\ 0.682 \\ 0.803 \\ 0.924 \end{pmatrix} \qquad u(p) := \text{qnorm}(p, 0, 1) \quad u(H) = \begin{pmatrix} -1.434 \\ -0.852 \\ -0.473 \\ -0.153 \\ 0.153 \\ 0.473 \\ 0.852 \\ 1.434 \end{pmatrix}$$

Regressionsgeraden:

Stichprobe A: $d := \text{achsenabschn}(xA, u(H))$ $k := \text{neigung}(xA, u(H))$ $yA(xA) := k\cdot xA + d$

Stichprobe B: $d := \text{achsenabschn}(xB, u(H))$ $k := \text{neigung}(xB, u(H))$ $yB(xA) := k\cdot xA + d$





Die Darstellung im Wahrscheinlichkeitsnetz stützt die Normalverteilungsannahmen.

b) Hersteller A: $n_A = 8$, $\bar{x}_A = 15{,}03\,\text{N/mm}^2$, $s_A = 1{,}005\ \text{N/mm}^2$

Hersteller B: $n_B = 8$, $\bar{x}_B = 14{,}15\,\text{N/mm}^2$, $s_B = 1{,}201\ \text{N/mm}^2$

Zweiseitiger F-Test zuvor, um Gleichheit der Standardabweichungen σ_A, σ_B der beiden Normalverteilungen annehmen zu können, $\alpha = 5\%$:

Prüfwert $F_{\text{prüf}} = \dfrac{1{,}201^2}{1{,}005^2} = 1{,}43$ (größere Stichprobenvarianz im Zähler!);

kritischer Wert: $F_{7,7;0,975} = 4{,}99$; $F_{\text{prüf}} \le 4{,}99$, daher Gleichheit der Standardabweichungen annehmbar.

Zweiseitiger t-Test für unabhängige Stichproben, $\alpha = 5\%$:

$s_d = \sqrt{\dfrac{1}{n}\cdot\left(s_A^2 + s_B^2\right)} = 0{,}554\ \text{N/mm}^2$, Prüfwert $t_{\text{prüf}} = \dfrac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_d} = 1{,}58$;

kritischer Wert: $t_{14;0,975} = 2{,}145$; da $|t_{\text{prüf}}| \le 2{,}145$, können die beiden Hersteller hinsichtlich der mittleren Festigkeit ihrer Ziegeln als gleichwertig betrachtet werden.

7.56 Näherungsweiser u-Test, $\alpha = 5\%$:

$\hat{p}_1 = \dfrac{16}{400} = 0{,}04$; $\hat{p}_2 = \dfrac{32}{400} = 0{,}08$; $\hat{p} = \dfrac{16+32}{400+400} = 0{,}06$; $s_d = \sqrt{\dfrac{2\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}0168$,

Prüfwert $u_{\text{prüf}} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{s_d} = -2{,}382$; kritischer Wert: $u_{0,975} = 1{,}960$; da $|u_{\text{prüf}}| > 1{,}960$, ist die H_0-Hypothese zugunsten der H_1-Hypothese zu verwerfen. Beim *höheren* Stichprobenumfang $n = 400$ ist der Unterschied der relativen Häufigkeiten der beiden Stichproben in schwach signifikantem Gegensatz zu $p_1 = p_2$; ein Unterschied der Fehleranteile der beiden Stanzautomaten kann daher angenommen werden; also Änderung der Entscheidung.

7.57 Näherungsweiser u-Test, $\alpha = 5\%$: $\hat{p}_1 = 24/1000 = 2{,}4\%$, $\hat{p}_2 = 36/1000 = 3{,}6\%$;

$\hat{p} = \dfrac{1}{2}\cdot(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) = 3\%$, $s_d = \sqrt{\dfrac{2\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}00763$, Prüfwert $u_{\text{prüf}} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{s_d} = -1{,}574$;

kritischer Wert: $u_{0,975} = 1{,}960$; da $|u_{\text{prüf}}| \le 1{,}960$, ist der Stichprobenbefund zufällig erklärbar; ein Unterschied in der Fertigungsqualität braucht nicht in Betracht gezogen werden.

P-Wert: $u_{1-P/2} = |u_{\text{prüf}}| = 1{,}574$, $1 - P/2 = G(1{,}574) = 0{,}9421$ oder $P = 11{,}6\%$. Bis zu einem Signifikanzniveau α von höchstens $11{,}6\%$ spricht die vorliegende Stichprobe für gleiche Fertigungsqualität. Insbesondere ist dies für $\alpha = 5\%$ der Fall.

7.58 Näherungsweiser u-Test, $\alpha = 1\%$: $\hat{p}_1 = 10/300 = 3{,}3\%$; $\hat{p}_2 = 2/300 = 0{,}67\%$;

$\hat{p} = \frac{1}{2}\cdot(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) = 2\%$; $s_d = \sqrt{\frac{2\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}0114$, Prüfwert $u_{prüf} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{s_d} = 2{,}333$;

kritischer Wert: $u_{0,995} = 2{,}576$; da $|u_{prüf}| \leq 2{,}576$, ist der Stichprobenbefund bei $\alpha = 1\%$ nicht in signifikantem Gegensatz zur Gleichwertigkeit in der Lieferqualität; die beiden Lieferanten können noch als gleichwertig eingestuft werden.

P-Wert: $u_{1\text{-}P/2} = |u_{prüf}| = 2{,}333$, $1\text{-}P/2 = G(2{,}333) = 0{,}9902$ oder $P = 0{,}0197 \approx 2\%$. Bis zu einem Signifikanzniveau α von höchstens 2% spricht die vorliegende Stichprobe für gleiche Fertigungsqualität. Insbesondere ist dies für $\alpha = 1\%$ der Fall, nicht jedoch mehr, wenn $\alpha = 5\%$ vorgegeben wäre!

7.59 Näherungsweiser u-Test, $\alpha = 1\%$: $\hat{p}_1 = 4\%$, $\hat{p}_2 = 7\%$; $\hat{p} = \frac{1}{2}\cdot(\hat{p}_1 + \hat{p}_2) = 5{,}5\%$;

$s_d = \sqrt{\frac{2\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}0144$, Prüfwert $u_{prüf} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{s_d} = -2{,}081$; kritischer Wert:

kritischer Wert $u_{0,995} = 2{,}576$; da $|u_{prüf}| \leq 2{,}576$, zeigt der Stichprobenbefund bei $\alpha = 1\%$ keinen Unterschied im Kaufverhalten an.

7.60 **a)** $\alpha = 5\%$; a = 3 Faktorstufen (Gruppen) mit je n = 4 Werten;

Mittel aller Werte: $\bar{y} = (7+8+...+6+9)/12 = 7$; Gruppenmittel: $\bar{y}_1 = (7+8+7+6)/4$;

$\bar{y}_2 = (6+7+5+6)/4 = 6$; $\bar{y}_3 = (8+9+6+9)/4 = 8$;

$Q_{tot} = (7\text{-}7)^2 + (8\text{-}7)^2 + ... +(6\text{-}7)^2 + (7\text{-}7)^2 + ... +(8\text{-}7)^2 + (9\text{-}7)^2 ... = 18$;

$Q_A = (7\text{-}7)^2 + (7\text{-}7)^2 + ... +(6\text{-}7)^2 + (6\text{-}7)^2 + ... +(8\text{-}7)^2 + (8\text{-}7)^2 = 8$;

$Q_R = (7\text{-}7)^2 + (8\text{-}7)^2 + ... + (6\text{-}6)^2 + (7\text{-}6)^2 + ... +(8 - 8)^2 + (9\text{-}8)^2 = 10$.

Probe: $Q_{tot} = Q_A + Q_R$; $f_A = a - 1 = 2$; $f_R = a\cdot(n-1) = 9$;

$s_A^2 = \frac{Q_A}{f_A} = 4$; $s_R^2 = \frac{Q_R}{f_R} = \frac{10}{9}$; Prüfwert $F_{prüf} = \frac{s_A^2}{s_R^2} = 3{,}60$; kritischer Wert $F_{2,9;0,95} = 4{,}26$;

da $F_{prüf} \leq 4{,}26$, wird kein Unterschied im Mittel zwischen den drei Gruppen angezeigt

b) Lösung mit Hilfe von Mathcad:

$$g1 := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad g2 := \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad g3 := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassen der drei Spaltenvektoren g1, g2 und g3 zu einer Matrix y:

$$y := \text{erweitern}(g1, g2, g3) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Gesamtmittel: $gm := \text{mittelwert}(y) = 5.833$

Gruppenmittel: $m_1 := \text{mittelwert}(g1) = 5.167$ $\quad m_2 := \text{mittelwert}(g2) = 5$ $\quad m_3 := \text{mittelwert}(g3) = 7.333$

$$Q_A := \sum_{i=1}^{3} \left[6(m_i - gm)^2\right] = 20.333 \qquad Q_R := \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{6} (y_{k,i} - m_i)^2 = 22.167$$

$$f_A := 2 \quad f_R := 15 \quad s_A := \sqrt{\frac{Q_A}{f_A}} = 3.189 \quad s_R := \sqrt{\frac{Q_R}{f_R}} = 1.216 \quad \text{Prüfwert: } F_{prüf} := \frac{s_A^2}{s_R^2} = 6.880$$

Kritischer Wert: $F := qF(0.95, f_A, f_R) = 3.682$

Da der Prüfwert größer als der kritische Wert ist, wird ein Unterschied im Mittel zwischen den drei Gruppen angezeigt.

7.61 **Simulation mit Mathcad, Neuberechnung durch Strg + F9:**

$\mu_1 := 50 \qquad \mu_2 := 50 \qquad \mu_3 := 52 \qquad \mu_4 := 54 \qquad \sigma := 2$

Je 8 normalverteilte Zufallszahlen für die 4 Gruppen g1, g2, g3 und g4::

$g1 := \mathrm{morm}(8,\mu_1,\sigma) \qquad g2 := \mathrm{morm}(8,\mu_2,\sigma)$

$g3 := \mathrm{morm}(8,\mu_3,\sigma) \qquad g4 := \mathrm{morm}(8,\mu_4,\sigma)$

$$g1 = \begin{pmatrix} 49.1 \\ 48.6 \\ 49.1 \\ 48.1 \\ 46.6 \\ 50.1 \\ 49.8 \\ 51.1 \end{pmatrix} \quad g2 = \begin{pmatrix} 54.4 \\ 51.6 \\ 52.0 \\ 51.7 \\ 51.8 \\ 51.3 \\ 47.9 \\ 50.1 \end{pmatrix} \quad g3 = \begin{pmatrix} 50.5 \\ 53.4 \\ 51.6 \\ 50.7 \\ 50.6 \\ 51.0 \\ 53.1 \\ 51.5 \end{pmatrix} \quad g4 = \begin{pmatrix} 54.2 \\ 56.5 \\ 52.6 \\ 54.0 \\ 56.2 \\ 55.8 \\ 48.2 \\ 49.7 \end{pmatrix}$$

$$y := \mathrm{erweitern}(g1,g2,g3,g4) = \begin{pmatrix} 49.1 & 54.4 & 50.5 & 54.2 \\ 48.6 & 51.6 & 53.4 & 56.5 \\ 49.1 & 52.0 & 51.6 & 52.6 \\ 48.1 & 51.7 & 50.7 & 54.0 \\ 46.6 & 51.8 & 50.6 & 56.2 \\ 50.1 & 51.3 & 51.0 & 55.8 \\ 49.8 & 47.9 & 53.1 & 48.2 \\ 51.1 & 50.1 & 51.5 & 49.7 \end{pmatrix}$$

Gesamtmittel: $gm := \mathrm{mittelwert}(y) = 51.34$

Gruppenmittel: $i := 1..4 \qquad m_i := \mathrm{mittelwert}\left(y^{\langle i\rangle}\right) \qquad m = \begin{pmatrix} 49.70 \\ 50.31 \\ 52.30 \\ 53.72 \end{pmatrix}$

$$Q_A := \sum_{i=1}^{4} \left[8\left(m_i - gm\right)^2\right] = 81.85 \qquad Q_R := \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{8} \left(y_{k,i} - m_i\right)^2 = 82.18$$

$$Q_T := \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{8} \left(y_{k,i} - gm\right)^2 = 164.04$$

Probe: $Q_A + Q_R = 164.04$

$$f_A := 3 \qquad f_R := 28 \qquad s_A := \sqrt{\frac{Q_A}{f_A}} = 5.22 \qquad s_R := \sqrt{\frac{Q_R}{f_R}} = 1.71$$

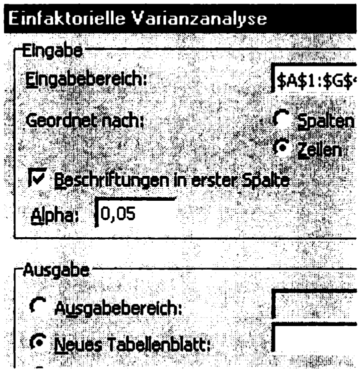
Prüfwert: $F_{\text{prüf}} := \frac{s_A^{\,2}}{s_R^{\,2}} = 9.30$

Kritischer Wert: $F := qF(0.95, f_A, f_R) = 2.95$

Entscheidung:

wenn($F_{\text{prüf}} \le F$, "kein Unterschied im Mittel" , "Unterschied im Mittel") = "Unterschied im Mittel"

7.62 Die Ausgabe (3.Bild) wurde aus Größengründen leicht verändert.



	A	B	C	D	E	F	G
1	1.Gruppe:	6	12	8	4	10	8
2	2.Gruppe:	7	1	5	3	8	6
3	3.Gruppe:	12	5	8	14	10	11
4	4.Gruppe:	9	12	5	10	7	11
5							

	A	B	C	D	E	F	G
1	Anova: Einfaktorielle Varianzanalyse						
2							
3	ZUSAMMENFASSUNG						
4	*Gruppen*	*Anzahl*	*Summe*	*Mittelwert*	*Varianz*		
5	1.Gruppe:	6	48	8	8		
6	2.Gruppe:	6	30	5	6,8		
7	3.Gruppe:	6	60	10	10		
8	4.Gruppe:	6	54	9	6,8		
9							
10							
11	ANOVA						
12	*Streuungsursache*	*Q.summe (SS)*	*Freih.gr. (df)*	*Mittl. Q.s. (MS)*	*Prüfgr.*	*P-Wert*	*krit. F-Wert*
13	Zwischen d. Gr.	84	3	28	3,544	0,033	3,10
14	Innerhalb d. Gr.	158	20	7,9			
15							
16	Gesamt	242	23				
17							

Da der Prüfwert 3,544 größer als der kritische Wert 3,10 ist (oder der P-Wert mit 0,033 kleiner als das Signifikanzniveau 5% ist), wird im Mittel ein Unterschied zwischen den vier Gruppen angezeigt.

7.63 *Zweistichproben-t-Test* bei $\alpha = 5\%$:
Automat 1: $n = 10$, $\bar{x}_1 = 1004{,}1$ ml, $s_1 = 4{,}8408$ ml;
Automat 2: $n = 10$, $\bar{x}_2 = 998{,}4$ ml, $s_2 = 3{,}74759$ ml;
Zweiseitiger F-Test zuvor, um die Gleichheit der Standardabweichungen σ_1, σ_2 der beiden Normalverteilungen annehmen zu können, $\alpha = 5\%$: Prüfwert $F_{\text{prüf}} = 4{,}84^2/3{,}75^2 = 1{,}67$;
Nun der eigentliche t-Test:

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\left(s_1^2 + s_2^2\right)} = 1{,}936, \text{ Prüfwert } t_{\text{prüf}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_d} = 2{,}94; \text{ kritischer Wert: } t_{18;0,975} = 2{,}101;$$

da $|t_{\text{prüf}}| > 2{,}101$, wird im Mittel ein Unterschied angezeigt.

Varianzanalyse bei $\alpha = 5\%$:
$a = 2$ Faktorstufen (Gruppen) mit je $n = 10$ Werten; Lösung rechnergestützt.
$Q_A = 162{,}45$, $f_A = 1$, $Q_R = 337{,}3$, $f_R = 18$; $s_A^2 = 162{,}45$, $s_R^2 = 18{,}74$, Prüfwert $F_{\text{prüf}} = 8{,}67 = t^2_{\text{prüf}}$;
kritischer Wert: $F_{1,18;0,95} = 4{,}41 = t^2_{18;\,0,975}$; da $F_{\text{prüf}} > 4{,}41$, wird im Mittel ein Unterschied angezeigt

7.64

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Sorte				Druckfestigkeit				Summe d. q. A. vom Gruppenmittel
2	1	2000	1930	2040	1960	1990	2070	2020	13485,71
3	2	2080	1930	2060	1970	1980	2010	2020	16342,86
4	3	2010	2090	2040	2060	2120	2070	2100	8400
5		Q_{tot} =		58495,24					
6		Q_R =		38228,57	f_R =	18	s_R^2 =	2123,81	
7		$Q_A = Q_{tot} - Q_R$ =		20266,67	f_A =	2	s_A^2 =	10133,33	
8		Prüfwert $F_{prüf}$ =		4,771					
9		krit. Wert F =		3,555					

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Sorte			Druckfestigkeit					Summe d. q. A. vom Gruppenmittel
2	1	2000	1930	2040	1960	1990	2070	2020	=SUMQUADABW(B2:H2)
3	2	2080	1930	2060	1970	1980	2010	2020	=SUMQUADABW(B3:H3)
4	3	2010	2090	2040	2060	2120	2070	2100	=SUMQUADABW(B4:H4)
5		Q_{tot} =		=SUMQUADABW(B2:H4)					
6		Q_R =		=SUMME(I2:I4)	f_R = 18		s_R^2 =	=D6/F6	
7		$Q_A = Q_{tot} - Q_R$ =		=D5-D6	f_A = 2		s_A^2 =	=D7/F7	
8		Prüfwert $F_{prüf}$ =		=H7/H6					
9		krit. Wert F =		=FINV(0,05;F7;F6)					

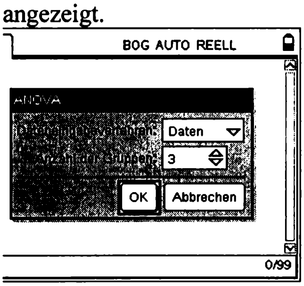
Da $F_{prüf} > F_{2,18,0,95} = 3{,}555$, wird im Mittel ein Unterschied der Druckfestigkeit zwischen den drei Betonsorten angezeigt

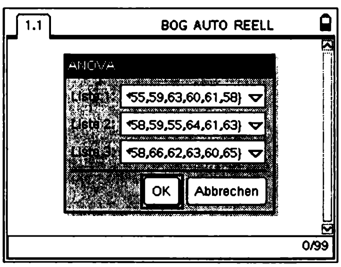
7.65

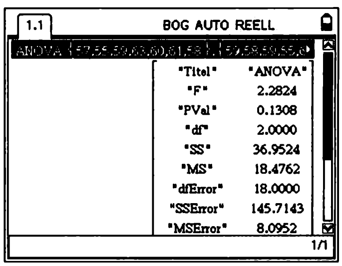
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Verp. art					Absatz						Summe d. q. A. vom Gruppenmittel
2	V_1	8	4	6	10	6	7	8	9	12	10	50
3	V_2	5	10	7	8	9	8	10	13	9	11	44
4	V_3	9	3	4	7	5	6	6	5	7	8	30
5	V_4	9	6	7	8	11	9	10	7	12	11	36
6		Q_{tot} =	220									
7		Q_R =	160			f_R =	36		s_R^2 =	4,444		
8		$Q_A = Q_{tot} - Q_R$ =			60	f_A =	3		s_A^2 =	20,000		
9		Prüfwert $F_{prüf}$ =			4,500							
10		krit. Wert F =			2,866							

Da $F_{prüf} > F_{3,36,0,95} = 2{,}866$, wird im Mittel ein Unterschied der verschiedenen Verpackungen auf die Nachfrage angezeigt.

7.66 $\alpha = 5\%$; a = 3 Faktorstufen (Gruppen) mit je n = 7 Werten;
$Q_A = 36{,}95$, $f_A = 2$, $Q_R = 145{,}7$, $f_R = 18$; $s_A^2 = 18{,}48$, $s_R^2 = 8{,}10$, $F_{prüf} = 2{,}28$; kritischer Wert: $F_{2,18;0,95} = 3{,}55$; da $F_{prüf} \leq 2{,}28$, wird kein Unterschied der drei Dünger auf den mittleren Ertrag angezeigt.



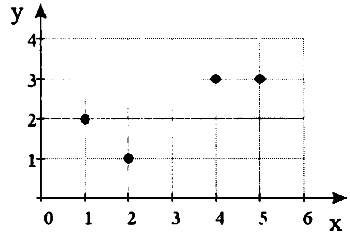




8 Zusammenhanganalysen

8.1 a)

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i.y_i$
1	1	2	1	4	2
2	2	1	4	1	2
3	4	3	16	9	12
4	5	3	25	9	15
Σ	12	9	46	23	31

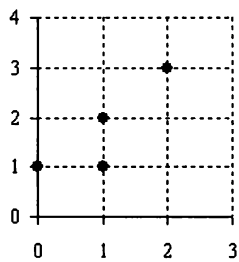


$$\bar{x}=\frac{12}{4}=3;\ \bar{y}=\frac{9}{4}=2{,}25;\ s_{xy}=\frac{1}{3}\cdot(31\ -\ 4\cdot 3\cdot 2{,}25)=1{,}333;\ s_x=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\left(46-4\cdot 3^2\right)}=1{,}826;$$

$$s_y=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\left(23-4\cdot 2{,}25^2\right)}=0{,}957;\ r=\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\frac{1{,}333}{1{,}826\cdot 0{,}957}=0{,}763$$

b)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_i*y_i		xquer =	1
2	1	0	1	0	1	0		yquer =	1,75
3	2	1	1	1	1	1		s_x =	0,816
4	3	1	2	1	4	2		s_y =	0,957
5	4	2	3	4	9	6		s_{xy} =	0,667
6	Σ	4	7	6	15	9		r =	0,853
7									
8								s_{xy} =	0,667
9								r =	0,853
10									



Bei Verwendung der Excel-Funktion KOVAR() zur Ermittlung der Kovarianz s_{xy} ist zu beachten, dass hier n und nicht n-1 als Nenner genommen wird. Der Korrelationskoeffizient kann auch unmittelbar mit KORREL() bestimmt werden.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_i*y_i		xquer =	=MITTELWERT(B2:B5)
2	1	0	1	=B2*B2	=C2*C2	=B2*C2		yquer =	=MITTELWERT(C2:C5)
3	2	1	1	=B3*B3	=C3*C3	=B3*C3		s_x =	=STABW(B2:B5)
4	3	1	2	=B4*B4	=C4*C4	=B4*C4		s_y =	=STABW(C2:C5)
5	4	2	3	=B5*B5	=C5*C5	=B5*C5		s_{xy} =	=(1/3)*(F6-4*I1*I2)
6	Σ	=SUMME(B2:B5)	=SUMME(C2:C5)	=SUMME(D2:D5)	=SUMME(E2:E5)	=SUMME(F2:F5)		r =	=I5/(I3*I4)
7									
8								s_{xy} =	=4/3*KOVAR(B2:B5;C2:C5)
9								r =	=KORREL(B2:B5;C2:C5)

c) Der Startindex wird gleich 1 gesetzt (Menü *Extras/Arbeitsblattoptionen, Systemvariablen*)

$$x:=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\4\end{pmatrix}\qquad y:=\begin{pmatrix}5\\3\\2\\0\end{pmatrix}$$

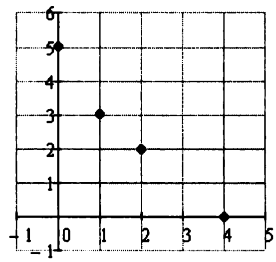
xquer := mittelwert(x) = 1.75 yquer := mittelwert(y) = 2.5

sx := Stdev(x) = 1.708 sy := Stdev(y) = 2.082

$$sxy:=\frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{4}(x_i\cdot y_i)-4\cdot xquer\cdot yquer\right]=-3.5$$

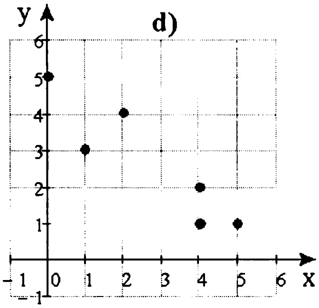
oder $sxy:=\frac{4}{3}kvar(x,y)=-3.5$

Die Mathcad-Funktion kvar() verwendet n und nicht n-1 als Nenner! Daher muss hier kvar() mit n = 4 multipliziert und anschließend durch n-1 = 3 dividiert werden.

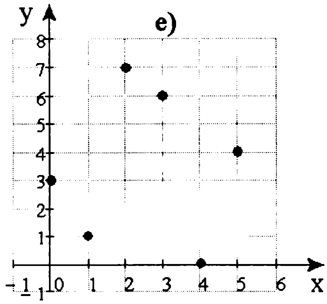


$r:=\frac{sxy}{sx\cdot sy}=-0.984$ oder $r:=korr(x,y)=-0.984$

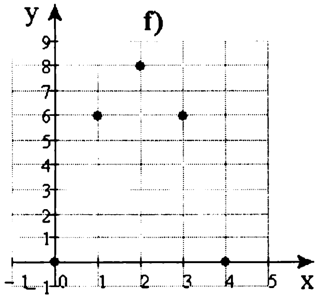
8.1



$\bar{x} = \bar{y} = 2{,}667$; $s_x = 1{,}966$;
$s_y = 1{,}633$; $s_{xy} = -2{,}933$;
$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -0{,}914$



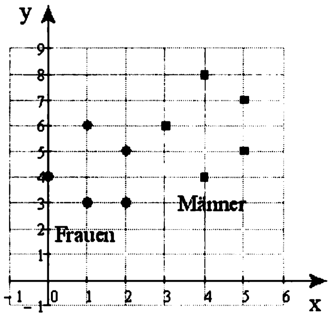
$\bar{x} = 2{,}5$; $\bar{y} = 3{,}5$; $s_x = 1{,}871$;
$s_y = 2{,}739$; $s_{xy} = 0{,}100$;
$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0{,}020$



$\bar{x} = 2$; $\bar{y} = 4$; $s_x = 1{,}581$;
$s_y = 3{,}742$; $s_{xy} = 0$; $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0.$

Obwohl r = 0, gibt es einen strengen *nichtlinearen* Zusammenhang: $y = -2x^2 + 8x$

8.2

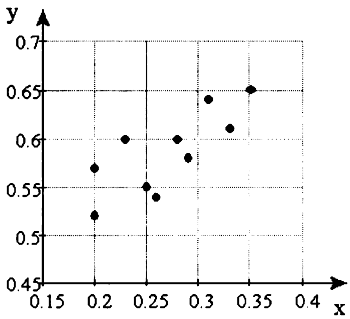


(1) Nur Frauen: $\bar{x} = 1{,}2$; $\bar{y} = 4{,}2$; $s_x = 0{,}837$; $s_y = 1{,}304$;
$s_{xy} = -0{,}050$; $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -0{,}046 \approx 0$

Nur Männer: $\bar{x} = 4{,}2$; $\bar{y} = 6$; $s_x = 0{,}837$; $s_y = 1{,}581$;
$s_{xy} = 0{,}000$; $r = 0{,}000$

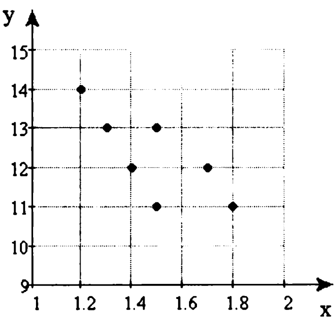
(2) Vereinigt: $\bar{x} = 2{,}7$; $\bar{y} = 5{,}1$; $s_x = 1{,}767$; $s_y = 1{,}663$;
$s_{xy} = 1{,}478$; $r = 0{,}503$

8.3



$\bar{x} = 0.270$; $\bar{y} = 0{,}586$; $s_x = 0{,}0516$;
$s_y = 0{,}0422$; $s_{xy} = 0{,}00168$; $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0{,}770$

8.4



a) $\bar{x} = 1{,}570$ t; $\bar{y} = 12$ km; $s_x = 0{,}291$ t; $s_y = 1{,}155$ km;
$s_{xy} = -0{,}278$ t km; $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = -0{,}827.$

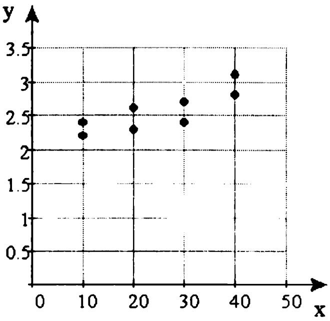
Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Einheit (etwa statt t auch kg oder statt km auch m möglich)

b) Test auf Unabhängigkeit zweier Merkmale:

$\alpha = 1\%$: n = 10, f = 8; Prüfwert $t_{\text{prüf}} = \dfrac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = -4{,}165$,

kritischer Wert: $t_{f;\,1-\alpha/2} = t_{8;\,0{,}995} = 3{,}355$; da $|t_{\text{prüf}}| > 3{,}355$, ist die Unabhängigkeit der beiden Merkmale zu verwerfen

8.5



a) $\bar{x} = 25$ g/kg; $\bar{y} = 2{,}56$ N; $s_x = 11{,}95$ g/kg; $s_y = 0{,}297$ N;

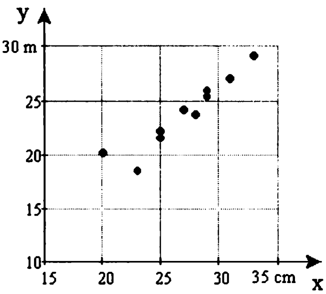
$$s_{xy} = 2{,}93 \text{ g N/kg}; \quad r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0{,}824.$$

b) Test auf Unabhängigkeit zweier Merkmale:

$\alpha = 1\%$: $n = 8$, $f = 6$; Prüfwert $t_{prüf} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = 3{,}564$,

kritischer Wert: $t_{f;\,1-\alpha/2} = t_{6;\,0{,}995} = 3{,}707$; da $|t_{prüf}| \le 3{,}707$, ist Unabhängigkeit auf dem kleinen Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ trotz des kleinen Stichprobenumfangs annehmbar!

8.6



a) $\bar{x} = 27$ cm; $\bar{y} = 23{,}70$ m; $s_x = 3{,}86$ cm; $s_y = 3{,}26$ m;

$$s_{xy} = 11{,}88 \text{ cm m}; \quad r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0{,}944.$$

b) Test auf Unabhängigkeit zweier Merkmale:

$\alpha = 1\%$: $n = 10$, $f = 8$; Prüfwert $t_{prüf} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = 8{,}115$,

kritischer Wert: $t_{f;\,1-\alpha/2} = t_{8;\,0{,}995} = 3{,}355$; da $|t_{prüf}| > 3{,}355$, ist die Unabhängigkeit zwischen Stammdurchmesser und Baumhöhe zu verwerfen!

8.7 Test auf Unabhängigkeit zweier Merkmale, $\alpha = 5\%$: $n = 6$, $f = 4$, $r = 0{,}5$

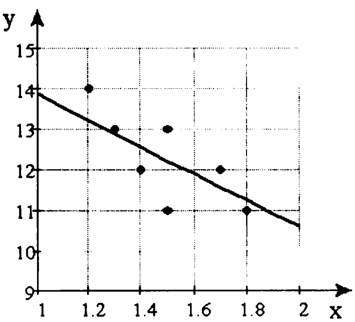
$t_{prüf} = r \cdot \sqrt{n-2} / \sqrt{1-r^2} = 1{,}155$, kritischer Wert: $t_{f;\,1-\alpha/2} = t_{4;\,0{,}975} = 2{,}776$;

da $|t_{prüf}| \le 2{,}776$, kann die Unabhängigkeit zwischen den beiden Merkmale nicht verworfen werden.

n	10	13	15	16
$t_{prüf}$	1,633	2,201	2,082	2,160
$t_{f;0,975}$	2,306	1,915	2,160	2,145

Erst bei $n = 16$ ist $|t_{prüf}|$ erstmals größer als der kritische Wert. D.h. es ist ein Mindestumfang $n = 16$ bei $\alpha = 5\%$ nötig, um bei $r = 0{,}5$ die Unabhängigkeit der Merkmale statistisch ausschließen zu können. Ist α kleiner, muss n weiter erhöht werden.

8.8 **a)**



$$\text{I}: \quad b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\text{II}: \quad b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

I: $b \cdot 15{,}7 + a \cdot 10 = 120$

II: $b \cdot 25{,}41 + a \cdot 15{,}7 = 185{,}9$

$\Rightarrow b = -3{,}29$; $a = 17{,}2$;

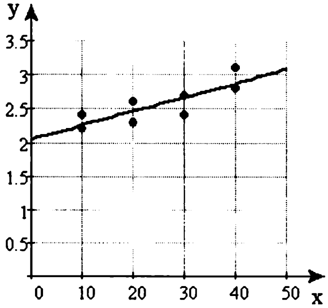
Regressionsgerade: $y(x) = 17{,}2 - 3{,}29 \cdot x$.

Ermittlung der Regressionsgerade auch nach vorheriger Bestimmung des Korrelationskoeffizienten r (siehe Aufgabe 8.4): $r = -0{,}827$; $b = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = -0{,}827 \cdot \frac{1{,}155}{0{,}291} = -3{,}29$;

$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 12 - (-3{,}29) \cdot 1{,}57 = 17{,}2$.

Diese Vorgangsweise ist besonders dann günstig, wenn auch das Bestimmtheitsmaß $B = r^2$ (gültig bei *linearer* Korrelation) gefragt ist.

8.8 **b)**



Regressionsgerade: y = a + b·x

$$\text{I:}\quad b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i \;+\; a\cdot n \;=\; \sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\text{II:}\quad b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \;+\; a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i \;=\; \sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

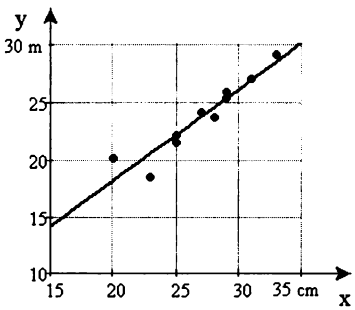
I: $b\cdot 200 + a\cdot 8 = 20{,}5$

II: $b\cdot 6000 + a\cdot 200 = 533$

$\Rightarrow$ $b = 0{,}0205$; $a = 2{,}05$;

$y(x) = 2{,}05 + 0{,}0205\cdot x$

8.9 **a)**



Regressionsgerade: y = a + b·x

$\bar{x} = 27\,\text{cm}$; $\bar{y} = 23{,}7$ m; $s_x = 3{,}859$ cm;

$s_y = 3{,}260$ m; $s_{xy} = 11{,}878$; $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y} = 0{,}944$.

$b = r\cdot\dfrac{s_y}{s_x} = 0{,}798$; $a = \bar{y} - b\cdot\bar{x} = 2{,}16$

$y = 2{,}16 + 0{,}798\cdot x$.

Bestimmtheitsmaß: $B = r^2 = 0{,}892$.

b) $\bar{x} = 27$; $s_x = 3{,}859$; $s = \sqrt{\dfrac{1}{n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}[y_i - y(x_i)]^2} = 1{,}138$; $t_{8;\,0{,}975} = 2{,}306$;

x_0 = 27 cm: $y(x_0) = 2{,}16 + 0{,}798\cdot 27 = 23{,}7$ m;

$$\mu_{0un} = y(x_0) - t_{8;0.975}\cdot s\cdot -\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{(n-1)\cdot s_x^2}} = 23{,}7 - 2{,}306\cdot 1{,}138\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(27-27)^2}{(10-1)\cdot 3{,}859^2}} = 22{,}9\text{ m};$$

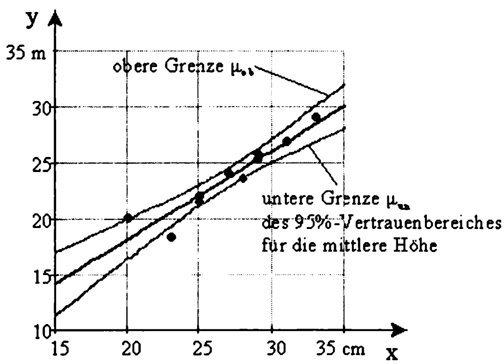
$$\mu_{0ob} = y(x_0) + t_{8;0.975}\cdot s\cdot +\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{(n-1)\cdot s_x^2}} = 23{,}7 + 2{,}306\cdot 1{,}138\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(27-27)^2}{(10-1)\cdot 3{,}859^2}} = 24{,}5\text{ m}.$$

Oder: 22,9 m $\le \mu_0 \le$ 24,5 m. Länge des 95%–Vertrauensbereiches: 1,6 m

x_0 = 33 cm: $y(x_0) = 28{,}5$ m; $\mu_{0un} = 28{,}5 - 2{,}306\cdot 1{,}138\cdot\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{(33-27)^2}{(10-1)\cdot 3{,}859^2}} = 26{,}9$ m;

$$\mu_{0ob} = 28{,}5 + 2{,}306\cdot 1{,}138\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(33-27)^2}{(10-1)\cdot 3{,}859^2}} = 30{,}1\text{ m}$$

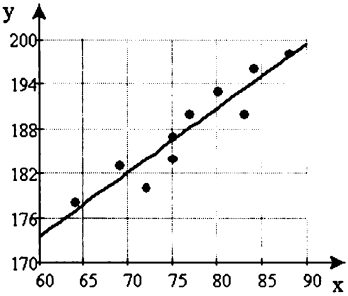
Oder: 26,9 m $\le \mu_0 \le$ 30,1 m. Länge: 3,2 m; diese hat sich gegenüber jener für x_0 = 27 cm (fast) verdoppelt.



Anmerkung:
Die nebenstehende Abbildung zeigt die Grenzen des 95%–Vertrauensbereiches für die mittlere Höhe der Fichten. Gezeichnet wurden neben der Regressionsgeraden die Graphen der Funktionen $\mu_{un}(x_0)$ bzw. $\mu_{ob}(x_0)$, die wie oben berechnet werden.

Man erkennt die Zunahme der Breite des Vertrauensbereiches von der Mitte $x_0 = \bar{x}$ nach oben und unten.

8.10 **a)**



Regressionsgerade: $y = a + b\cdot x$

$\bar{x} = 76{,}8\,\text{kW}$; $\bar{y} = 187{,}9$ km/h; $s_x = 7{,}285$ kW;

$s_y = 6{,}691$ km/h; $s_{xy} = 45{,}42$; $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0{,}932$.

$b = r\cdot\dfrac{s_y}{s_x} = 0{,}856$; $a = \bar{y} - b\cdot\bar{x} = 122{,}16$

$y = 122{,}2 + 0{,}856\cdot x$.

Bestimmtheitsmaß: $B = r^2 = 0{,}868$.

b) $\bar{x} = 76{,}8$; $s_x = 7{,}285$; $s = \sqrt{\dfrac{1}{n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - y(x_i)\right]^2} = 2{,}453$; $t_{8;\,0{,}975} = 2{,}306$;

$x_0 = 77$ kW: $y(x_0) = 188{,}07$;

$$\mu_{0un} = y(x_0) - t_{8;0.975}\cdot s\cdot - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)\div s_x^2}} = 188{,}07 - 2{,}306\cdot 2{,}453\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(77-76{,}8)^2}{(10-1)\div 7{,}285^2}} = 186{,}2$$

$$\mu_{0ob} = y(x_0) + t_{8;0.975}\cdot s\cdot + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)\div s_x^2}} = 188{,}07 + 2{,}306\cdot 2{,}453\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(77-76{,}8)^2}{(10-1)\div 7{,}285^2}} = 189{,}9.$$

Oder: $186{,}2$ km/h $\le \mu_0 \le 189{,}9$ km/h.

$x_0 = 87$ kW: $y(x_0) = 196{,}6$; $\mu_{0un} = 196{,}6 - 2{,}306\cdot 2{,}453\sqrt{\dfrac{1}{10} + \dfrac{(87-76{,}8)^2}{(10-1)\div 7{,}285^2}} = 193{,}3$

$$\mu_{0ob} = 196{,}6 + 2{,}306\cdot 2{,}453\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(87-76{,}8)^2}{(10-1)\div 7{,}285^2}} = 200{,}0.$$

Oder: $193{,}3$ km/h $\le \mu_0 \le 200{,}0$ km/h. Die Länge des Vertrauensbereiches hat sich gegenüber jenem für $x_0 = 77$ kW fast verdoppelt.

c) **$x_0 = 77$ kW**:

$$y_{un} = y(x_0) - t_{8;0.975}\cdot s - \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)\div s_x^2}} = 188{,}07 - 2{,}306\cdot 2{,}453\sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(77-76{,}8)^2}{(10-1)\div 7{,}285^2}} = 181{,}8$$

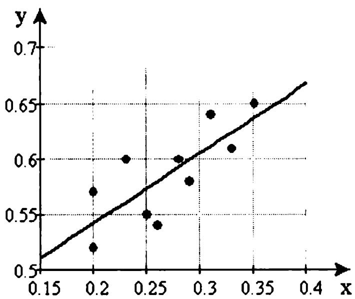
$$y_{ob} = y(x_0) + t_{8;0.975}\cdot s\cdot + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)\div s_x^2}} = 188{,}07 + 2{,}306\cdot 2{,}453\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(77-76{,}8)^2}{(10-1)\div 7{,}285^2}} = 194{,}3.$$

Oder: $181{,}8$ km/h $\le y \le 194{,}3$ km/h

$x_0 = 87$ kW: $y_{un} = 196{,}6 - 2{,}306\cdot 2{,}453\sqrt{1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{(87-76{,}8)^2}{(10-1)\div 7{,}285^2}} = 189{,}8$;

$y_{ob} = 196{,}6 + 2{,}306\cdot 2{,}453\sqrt{\dfrac{1}{10} + \dfrac{(87-76{,}8)^2}{(10-1)\div 7{,}285^2}} = 203{,}4$. Oder: $189{,}8$ km/h $\le y \le 203{,}4$ km/h.

8.11 **a)**



Regressionsgerade: $y = a + b\cdot x$

$\bar{x} = 0{,}27\,\%$; $\bar{y} = 0{,}586$; $s_x = 0{,}0516\%$;

$s_y = 0{,}0422$; $s_{xy} = 0{,}00168$; $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = 0{,}770$.

$b = r\cdot\dfrac{s_y}{s_x} = 0{,}629$; $a = \bar{y} - b\cdot\bar{x} = 0{,}416$

$y = 0{,}416 + 0{,}629\cdot x$.

Bestimmtheitsmaß: $B = r^2 = 0{,}592$.

8.11 **b)** $\bar{x} = 0{,}27$; $s_x = 0{,}0516$; $s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} [y_i - y(x_i)]^2} = 0{,}0286$; $t_{8;\,0{,}975} = 2{,}306$;

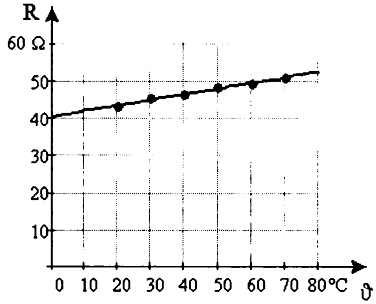
$x_0 = 0{,}28\%$: $y(x_0) = 0{,}592$;

$$\mu_{0un} = y(x_0) - t_{8;0.975} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \div s_x^2}} = 0{,}592 - 2{,}306 \cdot 0{,}0286 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(0{,}28 - 0{,}27)^2}{(10-1) \div 0{,}0516^2}} \approx 0{,}57$$

$$\mu_{0ob} = y(x_0) + t_{8;0.975} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1) \div s_x^2}} = 0{,}592 + 2{,}306 \cdot 0{,}0286 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(0{,}28 - 0{,}27)^2}{(10-1) \div 0{,}0516^2}} \approx 0{,}61.$$

Oder: $0{,}57 \cdot 10^9\,\text{Pa} \le \mu_0 \le 0{,}61 \cdot 10^9\,\text{Pa}$.

8.12



Regressionsgerade: $y = a + b \cdot x$

$$\text{I:}\quad b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\text{II:}\quad b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

I: $b \cdot 270 + a \cdot 6 = 281{,}2$

II: $b \cdot 13900 + a \cdot 270 = 12916$

$\Rightarrow a = 40{,}13$; $b = 0{,}150$. $y = 40{,}13 + 0{,}150 \cdot x$.

$b = R_0 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}150/40{,}13 = 0{,}00373\ \Omega^{-1} \cdot K^{-1}$

8.13 **a)**

$$x := \begin{pmatrix} 1640 \\ 3451 \\ 2478 \\ 1457 \\ 1927 \\ 1296 \\ 2575 \\ 1571 \\ 2931 \\ 2802 \\ 1976 \\ 2802 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} [illegible] \\ 11.4 \\ 9.7 \\ 8.1 \\ 8.8 \\ 9.5 \\ 10.4 \\ 9.1 \\ 10.6 \\ 9.7 \\ 9.4 \\ 9.9 \end{pmatrix}$$

Lösung mit Hilfe von Mathcad:

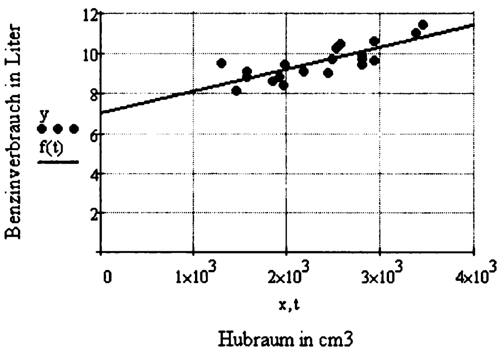
$n := \text{länge}(x) = 20$ $\quad sx := \text{Stdev}(x) = 630.46$ $\quad xquer := \text{mittelwert}(x) = 2345.9$

Regressionskoeffizient: $r := \text{korr}(x,y) = 0.799$ $\quad$ Bestimmtheitsmaß: $B := r^2 = 0.639$

Regressionsgerade $f(t) = a + b.t$:

$a := \text{achsenabschn}(x,y) = 6.97$ $\quad b := \text{neigung}(x,y) = 0.00109$

$t := 0..4000$ $\quad f(t) := a + b \cdot t$



b) $qt(0.975,8) = 2.306$ $\quad s := \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2} = 0.53252$ $\quad x0 := 2400$ $\quad f(x0) = 9.6$

Grenzen des 95%-Vertrauensbereiches in Liter für den mittleren Benzinverbrauch pro 100 km:

$$\mu un := f(x0) - qt(0.975, n-2) \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x0 - xquer)^2}{(n-1) \cdot sx^2}} = 9.34$$

$$\mu ob := f(x0) + qt(0.975, n-2) \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x0 - xquer)^2}{(n-1) \cdot sx^2}} = 9.85$$

9 Statistische Methoden des Qualitätsmanagements

9.1 a) Mathcad-Simulation zum Führen einer Mittelwertkarte bei μ = 25 und σ = 1 für n = 5. Neuberechnung durch Strg+F9

Startindex auf 1 gesetzt. $ue := qnorm(0.995, 0, 1) = 2.576$ $uw := qnorm(0.975, 0, 1) = 1.96$

$OEG := 25 + ue \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 26.152$ $UEG := 25 - ue \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 23.848$

$OWG := 25 + uw \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 25.877$ $UWG := 25 - uw \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 24.123$ $M := 25$

Aktueller Mittelwert: $\mu := 25$

Stichproben x (maximal 10) werden solange generiert, bis ein Eingriff erfolgt, also das Stichprobenmittel außerhalb der Eingriffsgrenzen liegt.

$m := \text{for } i \in 1..10$

$\quad x \leftarrow rnorm(5, \mu, 1)$

$\quad m_i \leftarrow mittelwert(x)$

$\quad \text{break if } (m_i > OEG) \vee (m_i < UEG)$

Stichprobennummer $z := \text{for } i \in 1..10$

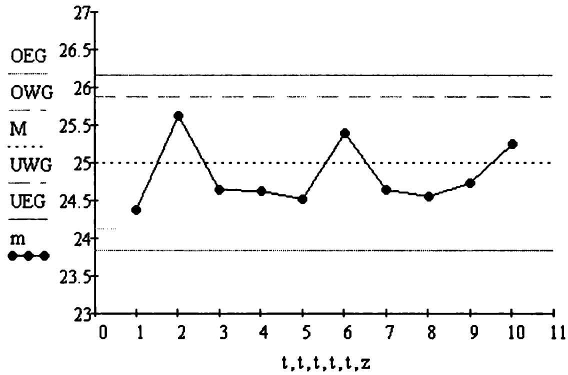
$\quad z_i \leftarrow i$

$t := 0..11$

Stichprobenmittel:

m =

	1
1	24.37
2	25.62
3	24.64
4	24.62
5	24.51
6	25.40
7	24.65
8	24.56
9	24.73
10	25.26



b) Aktueller Mittelwert: $\mu := 26$

Stichproben x (maximal 10) werden solange generiert, bis ein Eingriff erfolgt, also das Stichprobenmittel außerhalb der Eingriffsgrenzen liegt.

$m := \text{for } i \in 1..10$

$\quad x \leftarrow rnorm(5, \mu, 1)$

$\quad m_i \leftarrow mittelwert(x)$

$\quad \text{break if } (m_i > OEG) \vee (m_i < UEG)$

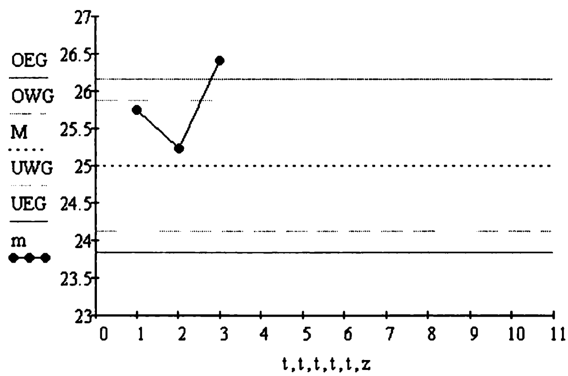
Stichprobennummer $z := \text{for } i \in 1..10$

$\quad z_i \leftarrow i$

$t := 0..11$

Stichprobenmittel:

$$m = \begin{pmatrix} 25.75 \\ 25.23 \\ 26.42 \end{pmatrix}$$



9.2 Die Eingriffsgrenzen sind neu zu bestimmen, da sie vom Stichprobenumfang n abhängen.

a) $n = 3$; $OEG = 25 + 2{,}576 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 26{,}49$ mA, $UEG = 25 - 2{,}576 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 23{,}51$ mA,

$$\mu^* = 26 \text{ mA};\; 1 - P_a = 1 - \left[G\left(\frac{26{,}49-26}{1/\sqrt{3}}\right) - G\left(\frac{23{,}51-26}{1/\sqrt{3}}\right)\right] =$$
$$= 1 - [G(0{,}844) - G(-4{,}308)] = 1 - [0{,}801 - 0{,}000] = 19{,}9\%$$

$$\mu^* = 27 \text{ mA};\; 1 - P_a = 1 - \left[G\left(\frac{26{,}49-27}{1/\sqrt{3}}\right) - G\left(\frac{23{,}51-27}{1/\sqrt{3}}\right)\right] =$$
$$= 1 - [G(-0{,}888) - G(-6{,}040)] = 1 - [0{,}187 - 0{,}000] = 81{,}3\%$$

b) $n = 10$; $OEG = 25 + 2{,}576 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 25{,}81$ mA, $UEG = 25 - 2{,}576 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 24{,}19$ mA,

$$\mu^* = 26 \text{ mA};\; 1 - P_a = 1 - \left[G\left(\frac{25{,}81-26}{1/\sqrt{10}}\right) - G\left(\frac{24{,}19-26}{1/\sqrt{10}}\right)\right] =$$
$$= 1 - [G(-0{,}586) - G(-5{,}738)] = 1 - [0{,}279 - 0{,}000] = 72{,}1\%$$

$$\mu^* = 27 \text{ mA};\; 1 - P_a = 1 - \left[G\left(\frac{25{,}81-27}{1/\sqrt{10}}\right) - G\left(\frac{24{,}19-27}{1/\sqrt{10}}\right)\right] =$$
$$= 1 - [G(-3{,}749) - G(-8{,}900)] = 1 - [0{,}000 - 0{,}000] = 99{,}99\%$$

9.3 **a)** $OEG = 40 + 2{,}576 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{7}} = 40{,}049$ mm; $OWG = 40 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{7}} = 40{,}037$ mm; $M = 40{,}000$ mm;

$UWG = 40 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{7}} = 39{,}963$ mm; $UEG = 40 - 2{,}576 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{7}} = 39{,}951$ mm;

b) $$1 - P_a = 1 - \left[G\left(\frac{40{,}049-40{,}05}{0{,}05/\sqrt{7}}\right) - G\left(\frac{39{,}951-40{,}05}{0{,}05/\sqrt{7}}\right)\right] =$$
$$= 1 - [G(-0{,}070) - G(-5{,}222)] = 1 - [0{,}472 - 0{,}000] = 52{,}8\%$$

c) $1 - P_a = 1 - \left[G\left(\frac{OEG-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - G\left(\frac{UEG-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] \approx 1 - G\left(\frac{OEG-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$, da für höhere n-Werte

$G\left(\frac{UEG-\mu^*}{\sigma/n}\right)$ praktisch null ist, wenn μ^* deutlich größer als μ ist (siehe etwa b) für $n = 7$).

Aus $1 - P_a \approx 1 - G\left(\frac{OEG-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq 80\%$ folgt $G\left(\frac{OEG-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq 20\%$ Da $OEG = \mu + 2{,}576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

und $\mu^* = 40{,}05 = \mu + \sigma$ folgt $G\left(\frac{\mu + 2{,}576 \cdot \sigma/\sqrt{n} - (\mu+\sigma)}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = G\left(\frac{2{,}576 \cdot \sigma/\sqrt{n} - \sigma)}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = G\left(2{,}576 - \sqrt{n}\right)$.

Daher: $2{,}576 - \sqrt{n} \leq u_{0,2} = -0{,}8416$ oder $n \geq 11{,}7$. Ab $n = 12$ wird die Forderung an die Eingriffswahrscheinlichkeit erfüllt.

Lösung eventuell auch durch rechnergestütztes Probieren:

Mathcad: $\mu := 40$ $\quad\sigma := 0.05$ $\quad\mu_1 := \mu + \sigma = 40.05$ $\quad n := 12$

$OEG(n) := \mu + \text{qnorm}(0.995, 0, 1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\qquad UEG(n) := \mu - \text{qnorm}(0.995, 0, 1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$P_a := \text{pnorm}\left(\frac{OEG(n) - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, 0, 1\right) - \text{pnorm}\left(\frac{UEG(n) - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, 0, 1\right) \qquad 1 - P_a = 81.3\%$$

9.4 **a)** $OEG = 90 + 2{,}576 \cdot \frac{3{,}2}{\sqrt{5}} = 93{,}686$ mm; $OWG = 90 + 1{,}96 \cdot \frac{3{,}2}{\sqrt{5}} = 92{,}805$ mm; $M = 90{,}000$ mm;

$UWG = 90 - 1{,}96 \cdot \frac{3{,}2}{\sqrt{5}} = 87{,}195$ mm; $UEG = 90 - 2{,}576 \cdot \frac{3{,}2}{\sqrt{5}} = 86{,}314$ mm

b) Stichprobe 1: $\bar{x} = 89{,}80$ µm; $UWG \le \bar{x} \le OWG$, „Fertigungslage µ wird eingehalten"
Stichprobe 2. $\bar{x} = 95{,}16$ µm; $\bar{x} > OEG$: „Eingriff"
Stichprobe 3: $\bar{x} = 92{,}88$ µm; $OWG < \bar{x} \le OEG$: „Warnung"

c) $$1 - P_a = 1 - \left[G\left(\frac{93{,}686 - 85}{3{,}2/\sqrt{5}} \right) - G\left(\frac{86{,}314 - 85}{3{,}2/\sqrt{5}} \right) \right] =$$
$$= 1 - [G(6{,}070) - G(0{,}918)] = 1 - [1{,}000 - 0{,}821] = 82{,}1\%$$

9.5 **a)** $OEG = 286 + 2{,}576 \cdot \frac{8}{\sqrt{8}} = 293{,}29$ mm; $OWG = 286 + 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{8}} = 291{,}54$ mm; $M = 286{,}00$ mm;

$UWG = 286 - 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{8}} = 280{,}46$ mm; $UEG = 286 - 2{,}576 \cdot \frac{8}{\sqrt{8}} = 278{,}71$ mm

b) Stichprobe 1: $\bar{x} = 287{,}8$ N, $UWG \le \bar{x} \le OWG$: „Fertigungslage µ wird eingehalten"
Stichprobe 2: $\bar{x} = 277{,}4$ N $< UEG$: „Eingriff"

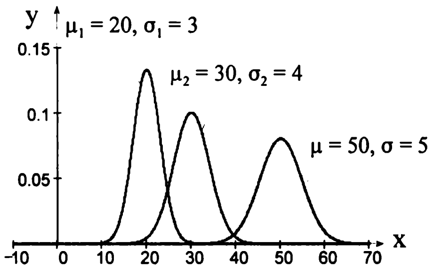
c) $$1 - P_a = 1 - \left[G\left(\frac{293{,}29 - 270}{8/\sqrt{8}} \right) - G\left(\frac{278{,}71 - 270}{8/\sqrt{8}} \right) \right] =$$
$$= 1 - [G(8{,}233) - G(3{,}081)] = 1 - [1{,}000 - 0{,}999] = 99{,}9\%$$

9.6 Die Summe ist ebenfalls normalverteilt. Die Parameter dieser Normalverteilung lauten:

$$\mu = 20 + 30 = 50, \quad \sigma = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$y_1 = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-20)^2}{2 \cdot 3^2}}; \quad y_2 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-30)^2}{2 \cdot 4^2}};$$

Summenverteilung: $$y = \frac{1}{5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-50)^2}{2 \cdot 5^2}}$$



9.7 **Mathcad-Simulation: Neuberechnung durch Strg + F9**
Startindex (Origin) auf 1 gesetzt.

a) Generiert werden **zwei** Stichprobenvektoren x und y von Zufallszahlen, die gleichverteilt zwischen 95 und 105 sind, jeweils vom Umfang n. Der Stichprobenumfang n steht für die produzierte Stückzahl. Es wird die Summe der beiden Vektoren gebildet. Danach erfolgt eine Klassierung

$n := 1000 \quad i := 1..n$

$x_i := \text{trunc}(0.5 + \text{rnd}(10)) + 95 \qquad y_i := \text{trunc}(0.5 + \text{rnd}(10)) + 95 \qquad s_i := x_i + y_i$

Um die Häufigkeit der einzelnen Summenwerte festzustellen, klassiert man diese. Als Klassengrenzen dienen die Zahlen 189,5; 190,5; 191,5; ... ; 210,5. Ruft man nun *Histogramm()* auf, so erhält man eine Matrix mit 2 Spalten: Die erste Spalte enthält die Klassenmitten 190, 191, 192, ... , 210, die zweite Spalte die Klassenhäufigkeiten. Diese sind gerade die gesuchten Häufigkeiten der Summenwerte.
Erhöht man den Stichprobenumfang n, also die Anzahl der Zufallszahlen, so wird s = x + y im Allgemeinen immer besser "dreiecksverteilt".

Klassengrenzen: $j := 1..22 \qquad kgrenze_j := 2 \cdot 95 + j - 2 + 0.5 \qquad H := \text{Histogramm}(kgrenze, s)$

Weiter nächste Seite.

9.7 a)
Forts.

x =

	1
1	104
2	95
3	95
4	98
5	105
6	104
7	104
8	95
9	102
10	99
11	100
12	103
13	97
14	100
15	105
16	...

y =

	1
1	97
2	103
3	95
4	103
5	99
6	105
7	99
8	103
9	104
10	102
11	103
12	103
13	99
14	101
15	99
16	...

s =

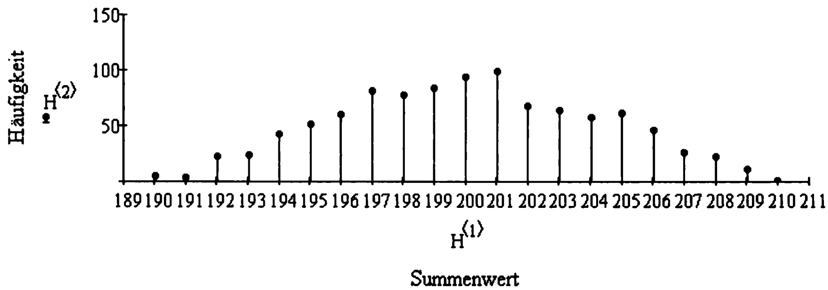
	1
1	201
2	198
3	190
4	201
5	204
6	209
7	203
8	198
9	206
10	201
11	203
12	206
13	196
14	201
15	204
16	...

kgrenze =

	1
1	189.5
2	190.5
3	191.5
4	192.5
5	193.5
6	194.5
7	195.5
8	196.5
9	197.5
10	198.5
11	199.5
12	200.5
13	201.5
14	202.5
15	203.5
16	204.5
17	205.5
18	206.5
19	207.5
20	208.5
21	209.5
22	210.5

H =

	1	2
1	190	5
2	191	4
3	192	23
4	193	24
5	194	42
6	195	51
7	196	60
8	197	81
9	198	77
10	199	84
11	200	94
12	201	99
13	202	67
14	203	64
15	204	57
16	205	61
17	206	46
18	207	26
19	208	23
20	209	11
21	210	1



9.7 b) Generiert werden **drei** Stichprobenvektoren x, y, und z von Zufallszahlen, die gleichverteilt zwischen 95 und 105 sind, jeweils vom Umfang n. Sonst entsprechend a).

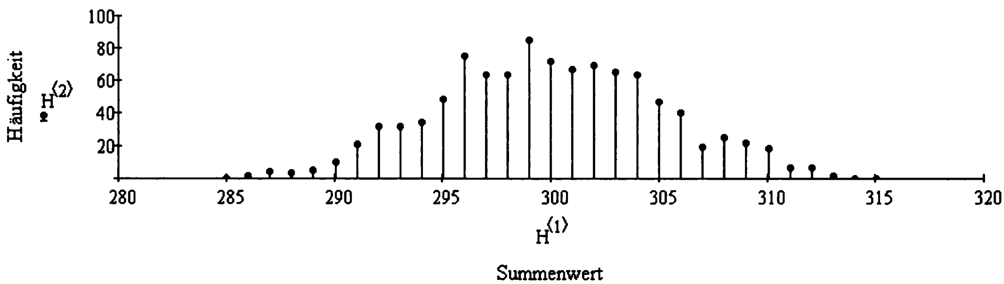
$n := 1000 \qquad i := 1..n$

$x_i := \mathrm{trunc}(0.5 + \mathrm{rnd}(10)) + 95 \qquad y_i := \mathrm{trunc}(0.5 + \mathrm{rnd}(10)) + 95 \qquad z_i := \mathrm{trunc}(0.5 + \mathrm{rnd}(10)) + 95$

$s_i := x_i + y_i + z_i$

Als Klassengrenzen dienen nun die Zahlen 284,5; 285,5; 286,5; ... , 315,5. Die Klassenmitten sind daher 285, 286, 287, ... , 315.

Klassengrenzen: $j := 1..32 \qquad kgrenze_j := 3 \cdot 95 + j - 2 + 0.5 \qquad H := \mathrm{Histogramm}(kgrenze, s)$



9.8 Die Einzeltoleranzen sind gegeben: $T_i = T_l = 0{,}02$ kg

a) $T_a = k \cdot T_l = 5 \cdot 0{,}02 \text{ kg} = 0{,}1 \text{ kg}$

b) $T_s = T_l \cdot \sqrt{k} = 0{,}02 \cdot \sqrt{5} \text{ kg} = 0{,}045 \text{ kg}$

c) $p = 0{,}27\%$: $r = \frac{u_{1-p/2}}{\sqrt{3k}} = \frac{u_{0{,}99865}}{\sqrt{3 \cdot 5}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = 0{,}775$; $T_s = r \cdot T_a = 0{,}775 \cdot 0{,}1 \text{ kg} = 0{,}077 \text{ kg}$

$p = 1\%$: $r = \frac{u_{1-p/2}}{\sqrt{3k}} = \frac{u_{0{,}995}}{\sqrt{3 \cdot 5}} = \frac{2{,}576}{\sqrt{15}} = 0{,}665$; $T_s = r \cdot T_a = 0{,}665 \cdot 0{,}1 \text{ kg} = 0{,}067 \text{ kg}$

9.9 Die Gesamttoleranz ist gegeben: T_a bzw. $T_s = 0{,}08\ l$

a) $T_a = 0{,}08\ l$; $T_l = T_a/k = 0{,}08/4\ l = 0{,}02\ l$

b) $T_s = 0{,}08\ l$; $r = \frac{u_{1-p/2}}{\sqrt{3k}} = \frac{u_{0{,}99}}{\sqrt{3 \cdot 4}} = \frac{2{,}326}{\sqrt{12}} = 0{,}672$; $T_l = \frac{T_s}{r \cdot k} = \frac{0{,}08}{0{,}672 \cdot 4} = 0{,}030\ l$

9.10 Die Einzeltoleranz ist gegeben: $T_l = 0{,}20$ mm

a) $T_a = k \cdot T_l = 6 \cdot 0{,}20 \text{ mm} = 1{,}20 \text{ mm}$; Dicke = (42,00 ± 0,60) mm

b) $T_s = T_l \cdot \sqrt{k} = 0{,}2 \cdot \sqrt{6} \text{ mm} = 0{,}49 \text{ mm}$; Dicke = (42,00 ± 0,245) mm

c) $p = 1\%$: $r = \frac{u_{1-p/2}}{\sqrt{3k}} = \frac{u_{0{,}995}}{\sqrt{3 \cdot 6}} = \frac{2{,}576}{\sqrt{18}} = 0{,}607$;

$T_s = r \cdot k \cdot T_l = 0{,}607 \cdot 6 \cdot 0{,}2 \text{ mm} = 0{,}729 \text{ mm}$; Dicke = (42,00 ± 0,364) mm

9.11 Die Gesamttoleranz ist gegeben: T_a bzw. $T_s = 0{,}2$ mm

a) $T_l = T_a/k = 0{,}2/6 \text{ mm} = 0{,}033 \text{ mm}$; Dicke = (7,0 ± 0,017) mm

b) $T_l = \frac{T_s}{\sqrt{k}} = \frac{0{,}2 \text{ mm}}{\sqrt{6}} = 0{,}082 \text{ mm}$; Dicke = (7,0 ± 0,041) mm

c) $r = \frac{u_{1-p/2}}{\sqrt{3k}} = \frac{u_{0{,}9975}}{\sqrt{3 \cdot 6}} = \frac{2{,}807}{\sqrt{18}} = 0{,}662$; $T_l = \frac{T_s}{r \cdot k} = \frac{0{,}2 \text{ mm}}{0{,}662 \cdot 6} = 0{,}050 \text{ mm}$; Dicke = (7,0 ± 0,025) mm

9.12 Die Gesamttoleranz ist gegeben: T_a bzw. $T_s = 0{,}4$ mm

a) $T_l = T_a/k = 0{,}4 \text{ mm}/10 = 0{,}04 \text{ mm}$; Dicke = (1,0 ± 0,02) mm

b) $T_l = \frac{T_s}{\sqrt{k}} = \frac{0{,}4 \text{ mm}}{\sqrt{10}} = 0{,}126 \text{ mm}$; Dicke = (1,0 ± 0,063) mm

c) $p = 1\%$: $r = \frac{u_{1-p/2}}{\sqrt{3k}} = \frac{u_{0{,}995}}{\sqrt{3 \cdot 10}} = \frac{2{,}576}{\sqrt{30}} = 0{,}470$; $T_l = \frac{T_s}{r \cdot k} = \frac{0{,}4 \text{ mm}}{0{,}470 \cdot 10} = 0{,}085 \text{ mm}$;

Dicke = (1,0 ± 0,043) mm

9.13 $T_1 = 0{,}2$ mm; $T_2 = 0{,}4$ mm; $T_3 = 0{,}1$ mm; $T_s = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2} = 0{,}46 \text{ mm}$.

Im Vergleich: Arithmetische Gesamttoleranz $T_a = T_1 + T_2 + T_3 = 0{,}70$ mm

9.14 $T_D = 0{,}20$ mm; $T_d = 0{,}10$ mm

a) $T_a = T_D + T_d = 0{,}30$ mm **b)** $T_s = \sqrt{T_D^2 + T_d^2} = 0{,}22 \text{ mm}$

9.15 **a)** $P_a(0{,}01) = G(c = 1; n = 50; p = 0{,}01) = \binom{50}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot (1-0{,}01)^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot (1-0{,}01)^{49} = 0{,}911$

$P_a(0{,}02) = G(1; 50; 0{,}02) = \binom{50}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot (1-0{,}02)^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot (1-0{,}02)^{49} = 0{,}736$

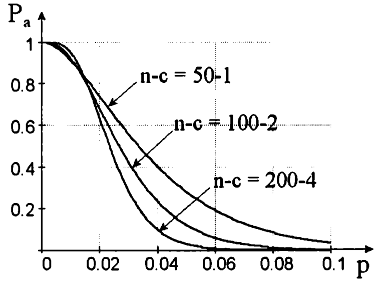
$P_a(0{,}04) = G(1; 50; 0{,}04) = \binom{50}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot (1-0{,}04)^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot (1-0{,}04)^{49} = 0{,}400$

$P_a(0{,}06) = G(1; 50; 0{,}06) = \binom{50}{0} \cdot 0{,}06^0 \cdot (1-0{,}06)^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}06^1 \cdot (1-0{,}06)^{49} = 0{,}190$

b) $P_a(p) = G(c = 2; n = 100; p) = \binom{100}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{100} + \binom{100}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{99} + \binom{100}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{98}$;

$P_a(0{,}01) = 0{,}921$; $P_a(0{,}02) = 0{,}677$; $P_a(0{,}04) = 0{,}232$;
$P_a(0{,}06) = 0{,}057$;

c) $P_a(p) = G(4; 200; p) =$
$\binom{200}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{200} + \binom{200}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{199} +$
$\ldots + \binom{200}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^{196}$;
$P_a(0{,}01) = 0{,}948$; $P_a(0{,}02) = 0{,}629$;
$P_a(0{,}04) = 0{,}095$; $P_a(0{,}06) = 0{,}006$



9.16 $P_a(p = 2\%) = G(2; n = 80, p = 2\%) =$
$= \binom{80}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot (1-0{,}02)^{80} + \binom{80}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot (1-0{,}02)^{79} + \binom{80}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot (1-0{,}02)^{78} = 0{,}784$; diese Annahmewahrscheinlichkeit ist zu klein (sie sollte mindestens etwa 90% betragen), das Interesse des Lieferanten ist daher nicht erfüllt;

$P_a(p = 7\%) = \binom{80}{0} \cdot 0{,}07^0 \cdot (1-0{,}07)^{80} + \binom{80}{1} \cdot 0{,}07^1 \cdot (1-0{,}07)^{79} + \binom{80}{2} \cdot 0{,}07^2 \cdot (1-0{,}07)^{78} =$
$= 0{,}075 < 10\%$, das Interesse des Abnehmers ist erfüllt

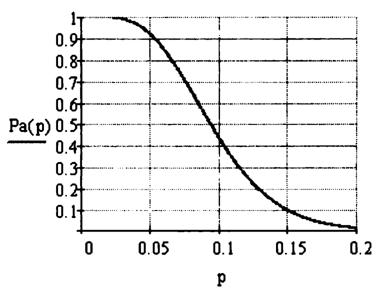
9.17 Man kann mehrere Annahmezahlen c für die Anweisung $n - c = 60 - c$ probieren und die Annahmewahrscheinlichkeit P_a für p = 5% (Kandidateninteresse) und p = 15% (Interesse der anderen Verkehrsteilnehmer) berechnen:

$P_a = G(c; n = 60, p) = \binom{60}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{60} + \binom{60}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{59} + \ldots + \binom{60}{c} \cdot p^c \cdot (1-p)^{60-c}$;

p	c = 3	c = 4	c = 5	c = 6
5%	$P_a = 0{,}647$	$P_a = 0{,}820$	$P_a = 0{,}921$	$P_a = 0{,}970$
15%	$P_a = 0{,}015$	$P_a = 0{,}042$	$P_a = 0{,}097$	$P_a = 0{,}185$

Die Anweisung $n - c = 60 - 5$ erfüllt beide Interessen, da P_a für p = 5% hoch (Richtwert > 90%) und für p = 15% niedrig (Richtwert < 10%) ist; daher sollte c = 5 gewählt werden.

c := 5 Pa(p) := pbinom(c,60,p)



9.18 $p = 5\%$;

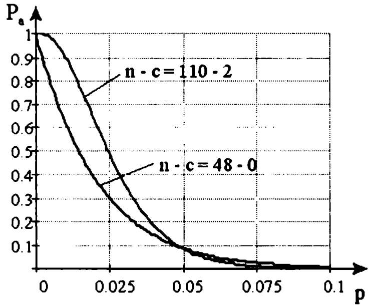
$n - c = 48 - 0$:

$$P_a = \binom{48}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1-0{,}05)^{48} = 8{,}5\%;$$

$n - c = 110 - 2$:

$$P_a = \binom{110}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1-0{,}05)^{110} + \binom{110}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot (1-0{,}05)^{109} +$$

$$+ \binom{110}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot (1-0{,}05)^{108} = 8{,}3\%$$



9.19 $N = 1000$: $n - c = 50 - 1$;

$P_a(p = 4\%) =$

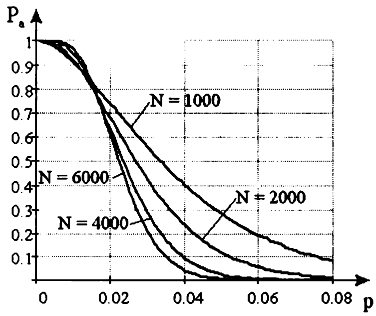
$$= \binom{50}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{49} = 40{,}1\%;$$

kein Schutz;

$N = 6000$: $n - c = 300 - 6$: $P_a(p = 4\%) =$

$$\binom{300}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{300} + \ldots + \binom{300}{6} \cdot 0{,}04^6 \cdot 0{,}96^{294} = 4{,}3\%;$$

wirksamer Schutz



9.20 $N = 50$: $n - c = 5 - 0$;

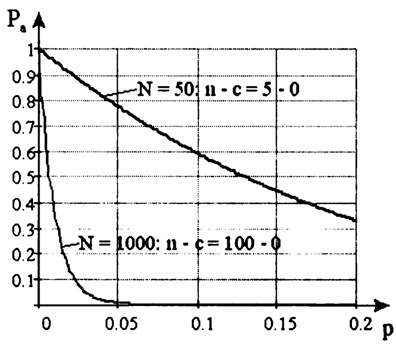
$$P_a(p = 10\%) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 = 60{,}0\%;$$

oder hypergeom. Vert. mit $N = 50$, $d = 5$, $n = 5$, da $n/N = 0{,}1$ und damit nicht kleiner als 0,1 ist;

$$P_a = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} = 57{,}7\%;$$

$N = 1000$: $n - c = 100 - 0$;

$$P_a(p = 10\%) = \binom{100}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{100} = 0{,}0027\% \approx 0\%$$



9.21 $R(0{,}5) = e^{-(0{,}5/T)^2} = 1 - 0{,}4\% = 0{,}996 \Rightarrow T = 0{,}5/\sqrt{-\ln 0{,}996} \approx 7{,}9$ Jahre

$e^{-(0{,}5/T)^2} = 0{,}996$ | logarithmieren

$\ln e^{-(0{,}5/T)^2} = \ln 0{,}996$

$-\left(\frac{0{,}5}{T}\right)^2 \cdot \ln e = \ln 0{,}996$; $\ln e = 1$;

$T = \frac{0{,}5}{\sqrt{-\ln 0{,}996}} \approx 7{,}9$ Jahre;

$R(1) = e^{-(1/T)^2} \approx 0{,}98$; d.h. es würden erwartungsgemäß ca. 98% aller Geräte eine reklamationsfreie Zeit länger als die neue Garantiezeit haben

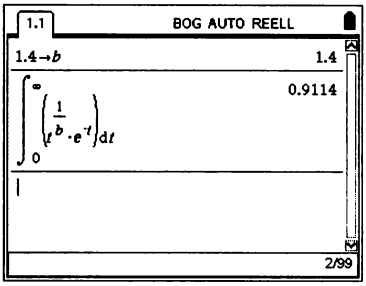
9.22 **a)** $R(8{,}0\cdot 10^4) = e^{-\left(\frac{8\cdot 10^4}{10^5}\right)^{2,8}} = e^{-0{,}8^{2,8}} \approx 59\%$

b) $\mu = a\cdot T = 0{,}890\cdot 10^5 = 89\,000$ h

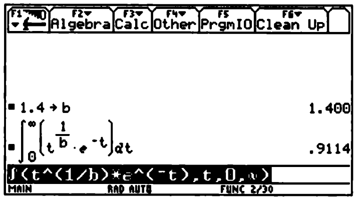
Mathcad: $b := 2.8 \qquad a := \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{b}}\cdot e^{-t}\,dt = 0.8905 \qquad$ oder $\qquad a := \Gamma\left(\frac{1}{b}+1\right) = 0.8905$

c) $t = T\cdot\sqrt[b]{-\ln R} \approx 45000$ h

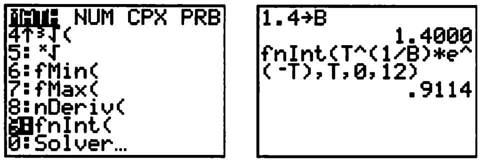
9.23 $\mu = a\cdot T = 0{,}911\cdot T \approx 1{,}8\cdot 10^5$ Lastwechsel



TI-nspire



Voyage 200



TI-82 STATS, TI-84 Plus: Als obere Grenze des Integrals nimmt man statt ∞ eine größere Zahl, hier genügt etwa 12.

9.24 $\mu = T$, weil Exponentialverteilung

a) $R(10\,000) = e^{-1} = 0{,}368 \approx 37\%$

b) $R(t) = e^{-t/T} = 0{,}95 \quad |$ logarithmieren

$\ln e^{-t/T} = \ln 0{,}95$

$-\frac{t}{T}\cdot\ln e = \ln 0{,}95;\ \ln e = 1$

$t = -T\cdot\ln 0{,}95 \approx 510$ h

9.25 $\mu = T$, weil Exponentialverteilung; $G(1700) = 1 - R(1700) = 1 - e^{-\frac{1700}{1{,}8\cdot 1000}} \approx 61\%$

9.26 $\mu = T = 1/\lambda = 5000$ h

9.27 **a)** $T = \mu$, d.h. Exponentialverteilung; $G(10^4) = 1 - e^{-\frac{10000}{4\cdot 10000}} \approx 22\%$

b) $t = -T\cdot\ln R = -4\cdot 10^4\cdot\ln 0{,}9 \approx 4200$ h

Mit Schreiben des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur, GZ 48.285/7-V/1/03 vom 12. Februar 2004 für den Unterrichtsgebrauch an höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (außer der Fachrichtung Kunst und Design) für den IV. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik empfohlen.

3. Auflage, 2010

Gesamtherstellung: Verlag E. DORNER GmbH, Wien

Buch-Nr. 120 713

Hans Siedler, Wolfgang Timischl
Ingenieur-Mathematik 4 –
Durchgerechnete Lösungen

Ungargasse 35, 1030 Wien
Tel.: 01 / 533 56 36, Fax: 01 / 533 56 36-15
E-Mail: office@dorner-verlag.at
www.dorner-verlag.at

ISBN 978-3-7055-**0635**-0